ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

УЧЕБНИКИ
и
УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ
для
ТРУДОВОЙ
ШКОЛЫ

Э. НОРРИС и Р. КРЭГО

ОСНОВЫ
АЛГЕБРЫ, ГЕОМЕТРИИ
и
ТРИГОНОМЕТРИИ



УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ШКОЛ I и II СТУПЕНИ

Э. Норрис и Р. Крэго

ПРАКТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ТЕХНИКОВ

Часть II

ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ, ГЕОМЕТРИИ И ТРИГОНОМЕТРИИ

перевел с английского применительно к русской школе
инженер С. И. КОШКИН

2 е ИЗДАНИЕ

просмотренное и дополненное
С. и М. ЖАРКОВЫМИ

11 — 70 тыс.

Научно-Педагогической Секцией Государственного Ученого Совета допущено для школ II ступени

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1923 ПЕТРОГРАД

Гиз. № 4495. Главлит. № 10189. Москва Напеч. 60.000 экз.
«Мосполиграф». 1-я Образцовая типография. Пятницкая, 71.

ПРЕДИСЛОВИЕ К 2 ИЗДАНИЮ.

В новом издании книги Норрис и Крэго, кроме нескольких отдельных поправок редакционного характера, сделаны следующие более или менее значительные изменения и добавления.

Все английские меры заменены метрическими, кроме тех случаев, где применение английских мер прочно укоренилось, как напр., при расчетах болтов и нарезок; при этом в некоторых случаях перевод одних мер в другие совершен автоматически просто эквивалентной заменой мер, в других пропорциональность между числами не соблюдена в силу каких-либо, большею частью дидактических, соображений. В § 71 изменено изложение определения и способа построения овала. В § 86 планиметр Амслера, который учащимся придется увидать разве только на рисунке, заменен наипростейшим самодельным планиметром Притца. В § 105 изменен текст, касающийся точности при вычислении угла по данной тригонометрической функции. Заново составлен § 110 о конусности и § 80 о подобии фигур. В § 47 вставлено описание поперечного масштаба с точностью в 0,01 см. В § 71 добавлено построение головки гаечного ключа. В § 82 прибавлено нахождение радиуса круга, равновеликого данному эллипсу, как пример пропорциональных линий в прямоугольном треугольнике. В § 99 указан прием вычисления тангенсов малых углов. В § 105 вставлены краткие указания относительно вычисления промежуточных значений, не имеющихся в таблицах; хотя об этом более подробно говорится в § 118, но для решения задач в главах XIV и XV, предшествующих § 118, необходимо уменье производить интерполяцию. В § 146 добавлено несколько слов о вычислении при помощи 4-х-значных логарифмов.

Затем добавлены задачи № № 49, 51, 115, 126, 137—140, 143, 218 и 219; изменены условия задач № № 196, 215 и 217 и сделано добавление в задаче 195.

Наконец, к книге приложены следующие таблицы: 1) Таблица сравнения английских мер с метрическими. 2) Таблица для перевода дюймов в миллиметры и футов—в метры. 3) Таблица числа π и его производных. 4) Таблица квадратов, кубов, квадратных и кубичных корней, обратных величин, окружностей и площадей круга для чисел или диаметров от 1 до 100.

В помощь преподавателю и для пользования книгой при самообразовании составлено отдельное добавление к книге, содержащее решения и ответы задач, помещенных в книге, и объяснения некоторых технических терминов, встречающихся в книге.

Рисунки, на которых размеры были даны в английских мерах, заменены новыми с указанием размеров в миллиметрах. Вновь добавлено 48 рисунков.

С. Ж.

14 февраля 23 г.

ГЛАВА I.

Формулы.

§ 1. Значение формул.

Правила, даваемые во всех справочниках, иногда выражаются словами, но чаще всего они изображаются в сокращенном виде посредством букв и знаков (символов), и тогда мы имеем **формулы.**

Знаки употребляются те же, что и в арифметике, а именно: сложения $+$, вычитания $-$, умножения $\times$, деления $:$, возвышения в степень (например ^{2}, или ^{3}), извлечения корня (например $\sqrt{}$ или $\sqrt[3]{}$) и некоторые другие, с которыми мы познакомимся впоследствии.

Буквы могут иметь различное значение; значение их объясняется в каждой формуле.

Если механику желательно знать размер гайки для болта определенного диаметра, он может легко подсчитать его, зная соответствующую формулу; электротехник тоже прибегает к формулам, когда ему приходится подсчитывать сечение проволоки, требующейся для передачи тока известного напряжения и силы на данное расстояние; техник и инженер пользуются формулами на каждом шагу для разрешения самых разнообразных задач.

Часто встречаемые на практике формулы запоминаются очень быстро; другие же не трудно отыскать в соответствующих справочниках, без которых иногда трудно обойтись.

§ 2. Применение букв.

Предложение или фраза, подобная следующей: „окружность равна произведению диаметра на число 3,1416“ заменяется простой формулой:

$$C = \pi \times D,$$

где буква C обозначает длину окружности; буква π (греческая— „пи“) заменяет 3,1416, а буква D — диаметр.

В формулах, вообще, мы встречаемся с тремя родами величин:

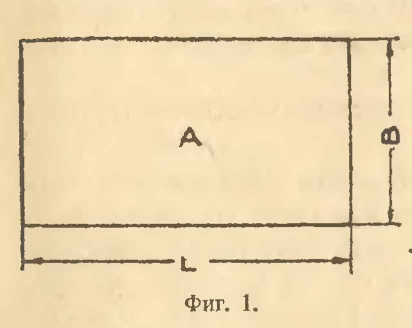
1. С постоянными — вроде π.
2. С известными — вроде D.
3. С неизвестными (искомыми) — вроде C.

Искомая величина определяется формулой, указывающей какие действия нужно проделать над известными.

Формулы удобны своей краткостью, ясностью и общностью; раз формула нам дана, мы без долгих рассуждений знаем, как вычислить искомую величину (неизвестное) для любых численных значений данных величин (известных).

Одновременно с формулой ниже дается объяснение буквам, входящим в нее, во всех тех случаях, когда это требуется для ясности формулы.

Конечно в такой общеизвестной формуле, как только что приведенная формула окружности, это почти не требуется и поэтому часто упускается; в других случаях прибегают к пояснительному рисунку (эскизу).



Фиг. 1.

На фиг. 1 показан, напр., прямоугольник A, длина которого выражается буквой L, а ширина—буквой B; если мы пожелаем узнать его площадь, очевидно, достаточно перемножить длину на ширину, это и выражается формулой:

$$A = L \times B,$$

которая при взгляде на рисунок становится понятной без дальнейших объяснений.

В некоторых случаях имеют дело с разными величинами одного и того же характера, напр., с двумя диаметрами; вместо того, чтобы обозначить диаметры различными буквами предпочитают называть их одной и той же буквой; но, чтобы иметь возможность отличить один диаметр от другого в формуле, обозначают их одним из следующих способов:

D и d или D' и D'', или же D_1 и D_2 и т. д.

Словами мы скажем: „Дэ большое“ и „дэ малое“, или „Дэ со знаком“ и „Дэ с двумя знаками“, или же „Дэ-один“ и „Дэ-два“ и т. д.

§ 3. Исключение знака умножения.

В формулах очень редко ставят знак умножения ($\times$), например, формула для площади прямоугольника:

$A = L \times B$ пишется просто $A = LB$.

Точно также для окружности мы пишем:

$C = \pi D$ и т. д.

Во всех таких случаях знак умножения просто подразумевается, но не ставится.

§ 4. Подстановка.

Чтобы вычислить неизвестное, мы подставляем вместо букв их численные значения и затем производим все указанные арифметические действия.

Пример 1. Вычислите длину окружности диаметром 12 см. [1].
По формуле $C = \pi D$ делаем подстановку: вместо π его величину 3,1416; вместо D — 12 см. и затем восстановляем пропущенный знак умножения; это даст:

$C = 3{,}1416 \times 12 = 37{,}6992$ см. или, округляя: 37,7 см. [2]).

Пример 2. Чему равна площадь круга диаметром 6 см.?
Как известно, формула площади круга будет:

$$A = \frac{\pi D^2}{4},$$

---

[1]) Буквы мм. служат сокращенным обозначением миллиметров; см. означает сантиметр; буква м. заменяет слово метр.

[2]) Если первая из отбрасываемых цифр больше 5 или равна 5, то предыдущую цифру, т.-е. последнюю из оставляемых, увеличивают на единицу; если же первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то предыдущую цифру оставляют без изменения.

где $\pi = 3{,}1416$. В последней формуле;

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3{,}1416}{4} = 0{,}7854$$

и, следовательно:

$$A = 0{,}7854 . D^2.$$

Вычисляют сначала D^2 или 6^2, что дает 36, а затем делают умножение:

$$A = 0{,}7854 \times 36 = 28{,}2744 \text{ кв. см.}$$

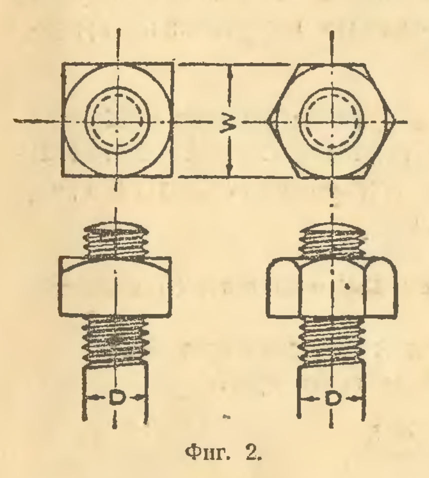
§ 5. Порядок действий.

Пусть будет дана формула:

$$W = 1{,}5\ D + 3 \text{ мм.}$$

Эта формула дает размер головки болта диаметром D мм. (фиг. 2.)

Порядок действий здесь таков: помножьте 1,5 на диаметр D, а затем прибавьте 3 мм., но отнюдь не иной; вообще, во всех формулах, если не обозначено особым образом (как увидим далее), сначала делают умножения, а затем уже следуют сложения и вычитания.



Фиг. 2.

Пример. Определите отверстие ключа для болта диаметром $^7/_8$ дм. [1]). Прежде всего обращаем дюймы в миллиметры: $^7/_8$ дм. = 22 мм.

Подставляя 22 мм. вместо D в формулу:

$$W = 1{,}5\ D + 3 \text{ мм.}$$

получим:

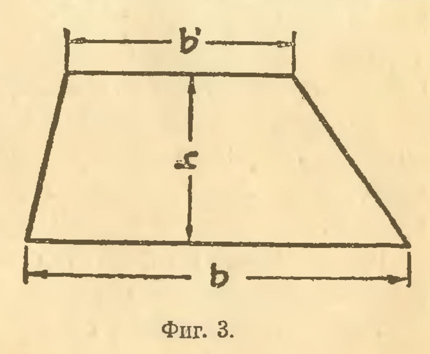
$$W = 1{,}5 \times 22 + 3 \text{ мм.} = 33 + 3 = 36$$

$$W = 36 \text{ мм.}$$

[1]) Буквы дм. означают дюймы; размеры болтов, кроме редких случаев метрической нарезки (см. стр. 185), принято выражать в дюймах.

§ 6. Скобки.

Очень часто требуется произвести действия сложения и вычитания ранее действий умножения и деления: это показывается в формуле посредством скобок ( ).



Фиг. 3.

Напр., в формуле, дающей величину площади фигуры, называемой трапецией, изображенной на фигуре 3, по двум параллельным сторонам: b и b' и высоте h, мы имеем:

$$A = \frac{1}{2}(b + b')\ h.$$

Это значит, что сначала надо сложить b и b', а затем помножить сумму на высоту h и разделить на два; скобки и показывают, что раньше всего надо произвести действие указанное **внутри их.**

Пример. Найдите площадь стального листа, имеющего форму трапеции со сторонами 1,8 и 1,2 метра и высотою 0,9 метра.

Здесь: $b = 1{,}8$ м.; $b' = 1{,}2$ м.; $h = 0{,}9$ м.; следовательно:

$$A = \frac{1}{2}(1{,}8 + 1{,}2)\ 0{,}9 = \frac{1{,}8 + 1{,}2}{2} \times 0{,}9 = 1{,}5 \times 0{,}9 =$$

$$= 1{,}35 \text{ кв. метра.}$$

Обратите внимание на то, что мы можем безразлично написать:

$$A = \frac{1}{2}(b + b')\ h,$$

или:

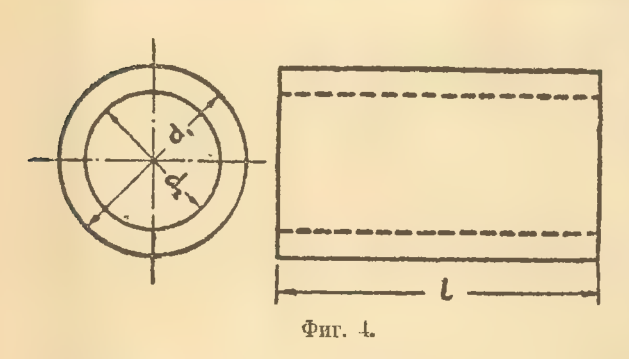
$$A = \frac{b + b'}{2} \times h.$$

§ 7. Составление формул.

Формулы обозначают все действия, которые приходится совершать над данными в задаче величинами, но самые действия не производятся до самого конца; при этом вместо данных численных значений мы пользуемся буквенными обозначениями, и, таким образом, постепенно получается или **выводится** формула. Этот способ производить вычисления удобен еще в том отношении, что благодаря ему возможны многие упрощения, которые при ином способе вычисления не столь заметны и поэтому не делаются; кроме того, результат получается общим в смысле применений.

Пример. Выведите формулу, посредством которой можно было бы вычислить вес металлической трубы.

Такая труба показана на фиг. 4. Длина, ее обозначенная через l, пусть будет дана в сантиметрах; наружный диаметр (тоже в сантиметрах) d_1, а внутренний диаметр d_2. Обозначим удельный вес металла, из которого сделана труба, т. е. вес одного кубического сант., через p.



Фиг. 4.

Мы должны сначала определить объем, занимаемый телом трубы; для этого надо знать площадь, занимаемую кольцом, представляющим сечение трубы.

Площадь кольца получается, если из площади круга с диаметром d_1, вычесть площадь круга с диаметром d_2, т. е.

$$\text{сечение трубы} = \frac{\pi}{4}\, d_1^2 - \frac{\pi}{4}\, d_2^2 = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2).$$

Объем, занимаемый телом трубы, получится умножением площади сечения на длину трубы, что даст:

$$\text{объем} = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)\; l.$$

Вес трубы равен ее объему, помноженному на вес куб. см. материала трубы, и, таким образом, искомая формула будет:

$$W = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)\ lp.$$

Пусть длина трубы равна 250 см., наружный диаметр — 5,5 см., внутренний диаметр — 5 см., удельный вес материала — 8,5: тогда:

$$l = 250;\ d_1 = 5,5;\ d_2 = 5;\ p = 8,5;\ \frac{\pi}{4} = 0,7854.$$

Подставляя эти численные значения в формулу, мы получим:

$$W = 0,7854 \times (5,5^2 - 5^2) \times 250 \times 8,5;$$

но $5,5^2 = 30,25$; а $5^2 = 25$, следовательно, величина в скобке превратится в $30,25 - 25 = 5,25$, и мы будем иметь:

$$W = 0,7854 \times 5,25 \times 2125 = 8762 \text{ гр.} = 8,762 \text{ кгр.}$$

Задачи.

1. Найдите площадь прямоугольника $A = LB$, если:

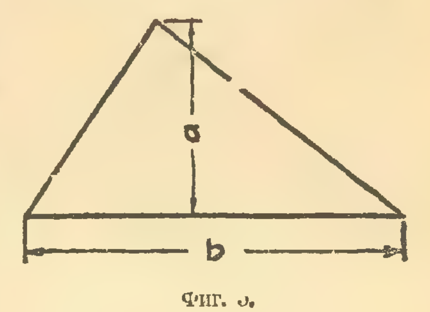
(a) $L = 13$ см.,	$B = 7$ см.
(b) $L = 4$ м.	$B = 1,5$ м
(c) $L = 7^1/_2$ м.	$B = 3^3/_4$ м
(d) $L = 20$ м	$B = 7$ м

2. Определите отверстие ключа для болта $W = 1,5\,D + 3$ мм., если:

$$D = \frac{5}{16}\text{ дм.};\ \frac{1}{2}\text{ дм.};\ \frac{3}{4}\text{ дм.};\ 1\frac{1}{8}\text{ дм.};\ 1\frac{1}{2}\text{ дм.}$$

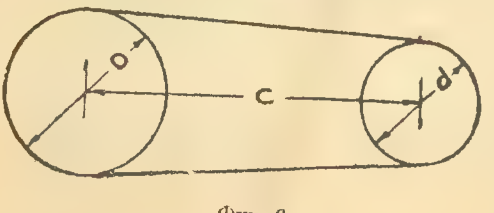
3. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту: $A = \frac{1}{2}ba$ (фиг. 5). Определите ее для:

(a) $a = 5$ см.;	$b = 6$ см
(b) $a = \frac{1}{2}$ м.	$b = \frac{1}{10}$ м.
(c) $a = 1$ м.	$b = \frac{1}{4}$ м
(d) $a = 2$ м.	$b = 4$ м.



Фиг. 5.

4. На фиг. 6 показаны два шкива диаметров D и d; расстояние между осями их — C; ременная передача состоит из двух прямых частей длиною, в общем, немного больше, чем $2C$, а также из двух дуг, одна из которых немного больше полуокружности большого шкива, а другая немного меньше полуокружности малаго шкива. В общей сложности, длина ремня будет несколько более. чем:



Фиг. 6.

$$\frac{\pi}{2}(D+d)+2C.$$

Т. к. $\frac{\pi}{2}=1{,}5708$, то для того, чтобы иметь небольшой запас в длине, можно взять для этого множителя, напр., 1,65; тогда формула для длины ремня будет:

$$L=1{,}65\ (D+d)+2C.$$

Определите эту длину для $D=0{,}9$ м., $d=0{,}6$ м.; расстояние между осями шкивов $=5$ м.

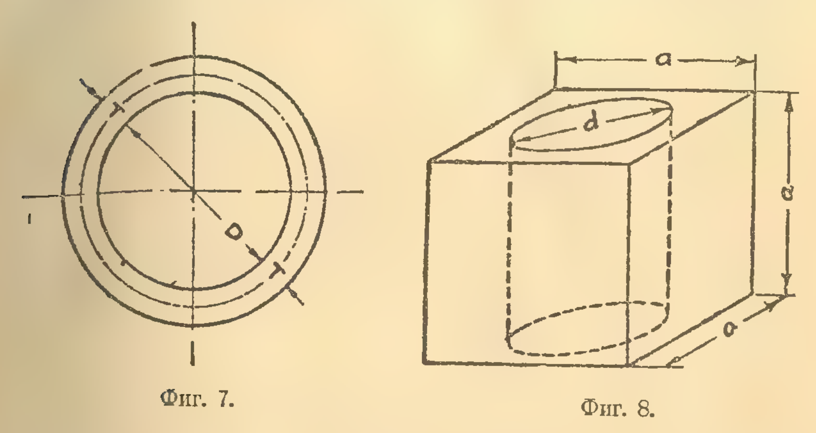
5. На фиг. 7 показано кольцо с внутренним диаметром D и толщиною T. Средний круг, показанный на чертеже прерывистой линией, имеет диаметр $(D+T)$. Длина прута, из которого должно быть сделано кольцо, будет равна окружности среднего круга, т. е. $\pi(D+T)$. Определите эту длину для $D=25$ мм. и $T=13$ мм.

6. Какова будет формула для объема прямоугольного металлического листа длиною l, шириною b и толщиною t?

7. Какова будет формула для веса этого листа, размеры которого даны в сантиметрах, если удельный вес металла равен p грам.?

8. Выведите формулу для веса круглого металлического листа диаметром D см., толщиною t см. из металла, весящего p грам. в одном куб. см. Вычислите этот вес для $D=160$ см., $t=1$ см. и $p=8^1/_2$ грам.

9. Если к круглому отверстию в металле, точно отшлифованному до внутреннего диаметра в d_1 см., желают плотно пригнать стержень, то диаметр последнего — d_2 должен быть немного



Фиг. 7. Фиг. 8.

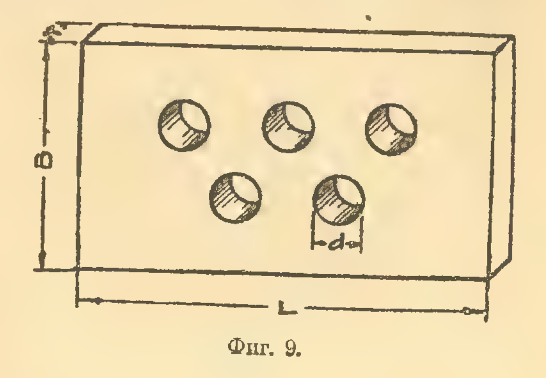
менее d, а именно, на столько тысячных миллиметра, сколько целых миллиметров отверстие имеет в диаметре; кроме того, берут запасных восемь сотых миллиметра. Формулой это практическое правило выражается в следующем виде:

$$d_2 = d_1 - 0{,}001\ d_1 - 0{,}08.$$

Определите d_2 для $d_1 = 50$ мм.

10. На фиг. 8 изображен куб металла с ребром a мм.; в кубе просверлено отверстие диаметром в d мм., удельный вес металла равен p. Выведите формулу для веса этого тела и произведите расчет при $a = 60$ мм., $d = 50$ мм. и $p = 8^1/_2$.

11. На фиг. 9 изображена металлическая плита с пятью пробитыми в ней отверстиями. Определите вес этой плиты при



Фиг. 9.

$L = 100$ мм., $B = 50$ мм., $T = 6$ мм. и $d = 6$ мм.; удельный вес металла $= 8^1/_2$.

12. Выведите общую формулу для веса плиты, подобно изображенной на фиг. 9, для металла, 1 кб. см. которого весит p граммов, при числе дыр не равном пяти, а при любом числе K; размеры плиты и дыр обозначьте, как указано на чертеже.

ГЛАВА II.

Алгебраическая сумма.

§ 8. Алгебраические выражения и их члены.

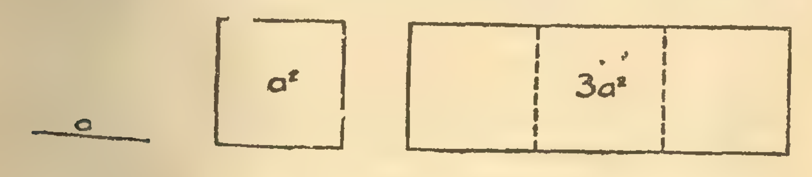
Сочетание букв и чисел, определяющее собою некоторую величину и могущее после подстановок дать одно какое-нибудь частное значение, называется алгебраическим выражением.

Напр., πr^2, $d_1^2 - d_2^2$, $a + b + c$, $1{,}5\,D + 3$ мм. и т. д. являются алгебраическими выражениями.

Части выражения, связанные знаком $+$ или $-$, называются членами [1]).

Выражение πr^2 состоит из одного члена; $d_1^2 - d_2^2$ имеет два члена: d_1^2 и $-d_2^2$: $a + b + c$—три члена и, наконец, $1{,}5\,D + 3$ мм.— два члена.

Член может состоять из трех частей: коэффициента, основания (основной величины) и показателя степени. В члене $3\,a^2$



Фиг. 10

коэффициентом будет 3, основанием a и, наконец, показателем степени ^{2}. Коэффициент есть численная часть члена; он указывает, сколько раз берется слагаемым величина, изображенная буквами. Так $3\,a^2$ обозначает, что a^2 берется три раза: $3 \times a^2$ или $a^2 + a^2 + a^2$.

Если a представляет собою длину, как указано на фиг. 10, то тогда a^2 будет площадь квадрата со стороною a; весь же

[1]) Выражение может иметь один или несколько членов.

член 3 a^2 будет площадь прямоугольника, составленного из трех квадратов a^2.

Если у куба ребро равно x см., то каждая грань его будет иметь x^2 кв. см., а т. к. куб имеет всего 6 граней, то общая поверхность куба будет 6 x^2 кв. см.

Если перед членом нет коэффициента, то подразумевается коэффициент 1. Так, L все равно, что $1L$ или $1 \times L$; D^2 то же, что $1D^2$ или $1 \times D^2$.

§ 9. Подобные или однородные члены.

Члены выражения, имеющие одинаковые основания и одинаковые показатели, но отличающиеся только своими коэффициентами, называются подобными или однородными членами. Так напр., 3 a^2 и 6 a^2 являются подобными или однородными членами, т. к. оба они относятся к однородным величинам и лишь количества этих величин различны. Если a изображает собою метры, то a^2 есть площадь квадрата со стороною a; 3 a^2 и 6 a^2 будут оба квадратными метрами, но лишь в различных количествах. Сложение подобных членов получается сложением их коэффициентов, все же остальное не меняется; так:

$$3\,a^2 + 6\,a^2 = 9\,a^2;$$

точно также:

3 кв. см. + 6 кв. см. = 9 кв. см.

3 гайки + 6 гаек = 9 гайкам и т. д.

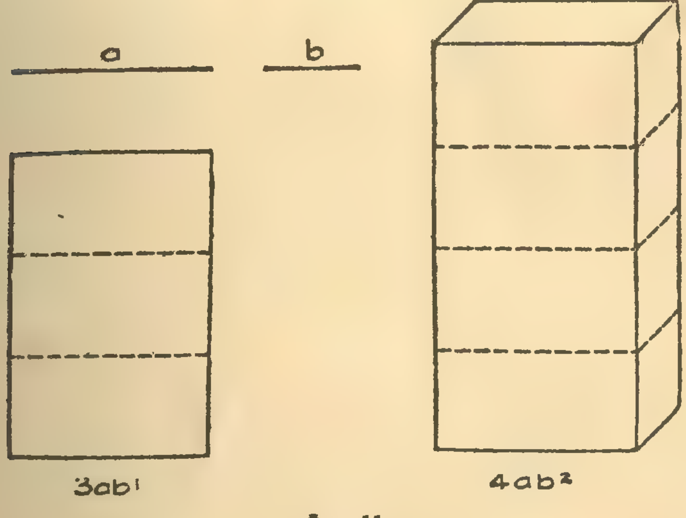
Таким же образом при вычитании подобных членов надо вычесть их коэффициенты:

$$5\,D^2 - D^2 = 4\,D^2.$$

Если основание или показатели не одинаковы, то мы не можем произвести сложения, но можем лишь обозначить его, т. к. тут мы будем иметь дело с неоднородными величинами. Например, 3 ab и 4 ab^2 не могут быть соединены в один член, т. к. они не однородны

По фиг. 11 мы можем составить представление о характере каждого из этих разнородных членов. Так, если a и b будут длины, то 3 ab будет площадь некоторого прямоугольника, рав-

ного по площади трем прямоугольникам со сторонами a и b; точно так же выразится объем, если высота тела будет равна единице, т.-е. $3\,ab \times 1$ или $3\,ab$. Что же касается $4\,ab^2$, то это



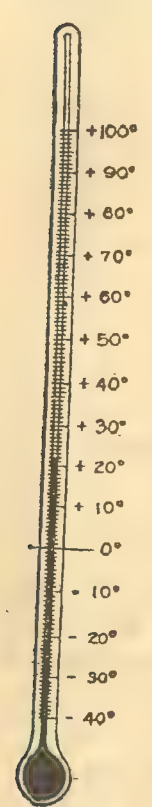
Фиг. 11.

будет объем некоторого тела, составленного, например, из четырех кирпичей длиною a, шириною b и высотою b см. Каждый из кирпичей имеет ab^2 куб. см. Весь объем будет выражен в кубических сантиметрах.

§ 10. Положительные и отрицательные величины.

При решении задач в арифметике мы смотрим на знаки + и —, как на сокращенные обозначения действий сложения и вычитания. Мы можем точно так же смотреть на эти знаки и тогда, когда мы их встречаем в формулах или в алгебраических выражениях. Мы только что видели, что не всегда возможно произвести сложение членов, имеющих эти знаки перед собою. Поэтому таким членам и действиям над ними приходится в алгебре придавать несколько иное значение, и ничто не мешает нам смотреть, между прочим, на знаки + и —, как на нечто, принадлежащее самим членам. Когда перед членом стоит +, мы называем его положительным членом, когда же стоит —, член

называется отрицательным. Знаки $+$ и $-$ указывают на направление, в котором происходит изменение некоторой величины; если оно идет в сторону увеличения, ставят $+$, в сторону уменьшения, ставят $-$; для сравнения величин исходную точку (произвольную) можно обозначить нулем, все величины над этой точкой будут положительными, а под нею — отрицательными. Для примера возьмем термометр (см. фиг. 12). Нуль термометра соответствует определенному явлению, напр., таянию льда; градусы также определены известным образом (у Цельсия, напр., 100° стоит на точке кипения воды); когда мы говорим о температуре в $+21°$, мы подразумеваем, что термометр показывает столько же градусов над нулем; если же температура отрицательна, то это значит, что термометр стоит под нулем, напр., $-40°$.



Фиг. 12.

Если термометр показывает $+70°$, а затем показание меняется на $-15°$, то он покажет $+70° - 15° = +55°$. Если же он стоял на $+5°$, то изменение на $-15°$ даст $+5° - 15° = -10°$.

Деньги, которые вы получаете или имеете, будут положительны; деньги, которые вы выдаете или должны, будут отрицательны. Так, имея некоторую сумму денег и долг, превышающий ее, вы будете в результате иметь отрицательную сумму денег. Таких примеров можно привести сколько угодно.

Когда перед членом не стоит никакого знака, то подразумевается, что член положительный. Первый член выражения обыкновенно положительный и поэтому не имеет знака, так, например, $a - b + c$ и $+a - b + c$ одно и то же; но мы могли бы также начать и с отрицательного члена, тогда, однако, знака минус опускать нельзя: $-b + a + c$.

§ 11. Алгебраические суммы.

Когда несколько подобных членов выражения имеют перед собою различные знаки, то мы складываем коэффициенты всех членов со знаком $+$, с одной стороны, и все коэффициенты членов со знаком $-$, с другой. Затем от полученного коэффи-

циента со знаком $+$ мы отнимаем найденный коэффициент со знаком $-$; результат дает член со знаком $+$ или $-$, в зависимости от того, какой из обоих коэффициентов больше. Такое соединение подобных членов в один называется алгебраическим сложением; результат — алгебраической суммой.

Напр.,

$$3\ ab - ab + 7\ ab - 4\ ab = 5\ ab, \text{ т. к.}$$

$$3 + 7 = 10 \text{ и } 1 + 4 = 5; \text{ затем } 10 - 5 = 5.$$

Мы могли бы также написать это, пользуясь скобками, в следующем виде:

$$(3 + 7)\ ab - (1 + 4)\ ab = 10\ ab - 5\ ab = 5\ ab.$$

Другой пример:

$$8x + 3y - 5x + 4y - 2x - 3y = x + 4y.$$

Здесь мы не должны смешивать членов, имеющих основанием x, с членами, имеющими основанием y, а производить вычисления совершенно отдельно:

$$8x - (5 + 2)\ x + (3 + 4)\ y - 3y = (8 - 7)x + (7 - 3)\ y = x + 4y.$$

Обратите особенное внимание на правильное пользование скобками; они служат сначала для объединения всех коэффициентов с одинаковыми знаками, которые нужно сложить, а затем, когда мы получим для x и для y отдельно по одному положительному и по одному отрицательному коэффициенту, мы их опять объединяем в различные скобки, внутри которых производятся вычитания, дающие окончательные коэффициенты для x и для y.

Конечно, можно воспользоваться скобками и следующим образом:

$$(8 - 5 - 2)\ x + (3 + 4 - 3)\ y = x + 4y.$$

§ 12. Сложение.

Т. к. положительные величины складываются точно так же, как и в арифметике, то особый интерес представляет сложение отрицательных величин; понять такое сложение нетрудно, если обратиться

к иллюстрации отрицательных величин посредством отрицательных температур. Напр., если термометр показывает -5° и еще упал на -10°, то он будет показывать, очевидно, -15°; изображается же это так:

$$-5+-10=-15.$$

Подобным же образом, если к члену $-5a$ приходится прибавить $-10a$, то мы можем написать:

$$-5a+-10a=-15a.$$

Чтобы не было неясностей, следует воспользоваться скобками:

$$(-5a)+(-10a)=(-15a).$$

Хотя скобки здесь, по существу, не нужны, но они лучше оттеняют характер действия сложения отрицательных величин.

Примеры.

$$26X-16X=10X.$$

$$-15M+4M=-11M.$$

$$3D^3-10D^3=-7D^3.$$

Первый пример очевиден сам собой, второй и третий легко понять, если опять обратиться к термометру:

$$-15^\circ+4^\circ=-11^\circ$$

$$+3^\circ-10^\circ=-7^\circ$$

Вообще при действиях над однородными членами с разными знаками вычитают из большего коэффициента меньший и ставят тот знак, который имел больший. Подобное действие называют **алгебраическим сложением.**

§ 13. Сложение многочленов.

Когда выражение содержит несколько членов, оно называется многочленом. Многочленами бывают поэтому: двучлены, трехчлены и т. д.; все они состоят из одночленов; поэтому многочлен можно еще назвать алгебраической суммой одночленов.

При сложении нескольких многочленов можно складывать только подобные или однородные члены; удобнее всего располагать многочлены один под другим так, чтобы один под другим стояли однородные члены; тогда коэффициенты складываются алгебраически друг с другом, как было объяснено выше.

Примеры.

1. Найдите сумму многочленов:

$$3\ X^2 + 2\ X + 1 \text{ и } X^2 - 4\ X + 4$$

Расположив их один под другим, мы найдем искомую сумму.

$$\begin{array}{r} 3\ X^2 + 2\ X + 1 \\ X^2 - 4\ X + 4 \\ \hline 4\ X^2 - 2\ X + 5. \end{array}$$

2. Сложите $D^2 + 1$; $D - 3$ и $D^2 + D + 2$.

Сложение делается следующим образом:

$$\begin{array}{r} D^2 \qquad + 1 \\ D - 3 \\ D^2 + D + 2 \\ \hline 2\ D^2 + 2D. \end{array}$$

Квадрат D складывается с квадратом, первая степень с первой степенью и числа с числами (последние дают O).

Задачи.

13. Найдите сумму: 3 болта + 6 болтов + 12 болтов.

14. Найдите сумму: 7 болтов + 5 болтов + 5 гаек + 7 гаек + 24 шайбы.

15. Сколько будет: 27 градусов — 15 градусов?

16. Что дадут 12 градусов — 17 градусов?

17. Сколько будет: — 5 рублей + 15 рублей?

18. Если некто имеет 1000 рублей, но должен 500 рублей одному лицу и 700 рублей другому, то какой суммой он владеет?

19. Найдите сумму $4 - 3 + 6$.

20. Найдите сумму $6\ X - 3\ X - 5\ X$.

21. Сложите $3\ D + 2$ и $D - 0{,}5$.

22. Сложите $a+b+c$ и $a+b-c$.

23. Сложите $2D^2-D-6$ и $-D^2+3D+4$.

24. Мастер ведет запись числа отливок, которые должны быть изготовлены по определенной модели; каждый раз, как он получает заказ на эти отливки, он отмечает их число в своей записной книжке со знаком +, все же изготовленные отливки он отмечает знаком —. Сколько остается сделать отливок, если запись в книжке показывает: 800 — 64 — 75 — 68 — 132 + 200 — 130 — — 72 — 128?

25. Если мы назовем внутренний диаметр бочки в самом широком месте через D, диаметр обоих днищ через d, высоту бочки (внутри) через h, то объем бочки выразится приблизительной формулой:

$$V=\frac{\pi}{4}h\left(\frac{2D+d}{3}\right)^2 \text{ кб. см.}$$

Если D, d и h даны в сантиметрах, то объем бочки в литрах выразится через:

$$V=\frac{3,1416}{36.1000}h(2D+d)^2=\frac{3.1416}{36000}h(2D+d)^2=$$

$$=0.0000873\ h(2D+d)^2 \text{ литров.}$$

Так как 1 вёдро = 12,3 литра, то объем бочки в ведрах выразится формулой:

$$V=\frac{0,0000873}{12,3}h(2D+d)^2=0,0000071\ h(2D+d)^2 \text{ ведер.}$$

Пусть $D=50$ см., $d=40$ см., а $h=70$ см. Сколько ведер вмещает эта бочка?

26. Партия поковок состоит из 80 штук весом по a кило каждая и из 64 поковок по b кило каждая. [1]) Вторая партия состоит из 50 поковок первого сорта и из 75 второго. В виду встретившегося брака, 8 поковок первого сорта и 12 второго были признаны негодными. Как выразится общий вес годных поковок?

[1]) Единицу веса килограмм часто называют сокращенно: кило.

ГЛАВА III.

Алгебраическая разность.

§ 14. Разность подобных членов.

Алгебраическое вычитание подобно вычитанию именованных чисел в арифметике; так же, как и там, вычитание может быть произведено только над однородными величинами. Мы можем соответственно вычитать длины друг из друга, площади, объемы, веса и т. д., но нельзя вычесть длину из веса, площадь из объема и т. д. Подобным образом, если мы желаем произвести вычитание одного алгебраического выражения из другого, мы должны вычесть однородные члены друг из друга; если же они не однородны, мы можем лишь обозначить действие вычитания, но самого вычитания мы не можем осуществить, пока буквы не будут заменены соответствующими цифровыми значениями.

Так:

$$12x - 4x = 8x; \quad 10a^3 - 4a^3 = 6a^3; \quad 2a^2c - 5\,a^2c = -3a^2c,$$

но: $x^2 - y^2$, или $3\,ab - 2bc$ и т. п., выражения должны остаться, как они здесь обозначены, само же действие вычитания может быть осуществлено после соответствующих подстановок и то лишь в тех случаях, когда будут получены однородные величины.

§ 15. Вычитание отрицательных величин.

Очень часто приходится вычитать отрицательный член из положительного или отрицательного члена. Напр., мы можем искать разность между $2a$ и $-a$, что можно было бы, пользуясь скобками, изобразить через:

$$2a - (-a) \text{ и } (-2a) - (-a)$$

Так как вычитание есть действие обратное сложению, то, когда приходится вычитать отрицательную величину, просто прибавляют положительную величину, что даст:

$$2a+(+a) \text{ и } (-2a)+(+a)$$

или просто:

$$2a+a=3a \text{ и } -2a+a=-a$$

Это выражается следующим правилом: при вычитании одного алгебраического выражения из другого следует изменить знаки вычитаемого и затем произвести сложение

Примеры. Отнимите от 4 D величину $-3D$:

$$4D-(-3D)=4D+3D=7D$$

Отнимите от $-21x^2$ величину $7x^2$:

$$-21x^2-7x^2=-28x^2.$$

В этом случае мы отнимаем положительную величину от отрицательной, что равносильно прибавлению отрицательной величины к другой отрицательной величине; очевидно, коэффициент у разности будет также отрицательная величина, но численное его значение (так называемая его абсолютная величина) будет равно сумме обоих коэффициентов.

Для лучшего уяснения сущности вышесказанного можно прибегнуть к иллюстрации посредством термометра. Вы знаете, что у термометра градусы над нулем называются положительными, а градусы под нулем — отрицательными; кроме того, изменения в сторону повышения температуры положительны, а в сторону уменьшения температуры — отрицательны. Когда мы говорим о разности двух температур, мы подразумеваем расстояние в градусах, которое существует между соответствующими точками термометрической шкалы; если при этом от температуры, которая вычитается, нужно подняться до другой, то разность будет положительна, если же нужно опуститься, то разность будет отрицательна. Напр., пусть термометр вчера показывал $-3°$, а сегодня показывает $+9°$, изменение температуры будет, очевидно, $12°$ со знаком $+$, так как температура повысилась, следовательно:

$$+9°-(-3°)=+12°.$$

Наоборот, если вчера температура была $+3°$, а сегодня стала $-9°$, то температура понизилась на 12°, т. е. изменение температуры равно $-12°$, поэтому:

$$-9° - (+3°) = -12°.$$

Приведем несколько примеров:

$$(+20°) - (-10°) = (+30°), \quad (-6°) - (-15°) = (+9°)$$
$$20x - (-10x) = +30x, \qquad 6a - (-15a) = +9a$$
$$6a^2 - (-3a^2) = +9a^2, \qquad 4D^2 - (-7D^2) = +3D^2$$

Из них мы видим, что вычитание отрицательной величины равносильно прибавлению положительной величины, как было сказано раньше. Говорят еще, что два знака минус, перед одной и той же величиной, дают плюс.

§ 16. Разность многочленов.

Многочлены располагаются один под другим, причем подобные члены пишутся под подобными и вычитаются, как было объяснено выше. Так как согласно правилу: при вычитании одного алгебраического выражения из другого следует изменить знаки вычитаемого и затем произвести сложение, то мы прежде, чем подписать вычитаемый многочлен под уменьшаемым, меняем все знаки вычитаемого и затем складываем.

Примеры.

1. Найдем разность:

$$(X^2 - 2X + 1) - (3X - 12)$$

Согласно с объясненным, мы можем представить вычитание в следующем виде:

$$\begin{array}{r} X^2 - 2X + 1 \\ -3X + 12 \\ \hline X^2 - 5X + 13 \end{array}$$

2. Отнимите $a - b + c$ от $a + b - c$

Действие располагается так:

$$\begin{array}{r} a + b - c \\ -a + b - c \\ \hline 2b - 2c \end{array}$$

3. Вычтите $a^2 - 2ab + b^2$ из $a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ -a^2 + 2ab - b^2 \\ \hline 4ab \end{array}$$

§ 17. Применение различных скобок.

Мы уже познакомились с употреблением скобок () и знаем, что всякое количество, стоящее внутри этих скобок, берется как одно целое выражение. Прежде, чем произвести другие действия, мы должны произвести все действия, указанные внутри скобок, и только после этого итти дальше; напр.,

$$7 - (5 - 1) = ?$$

Мы сначала получаем: $5 - 1 = 4$, а затем: $7 - 4 = 3$ Точно так же:

$$(6 + 4 - 3) - (7 + 1 - 2) = ?$$

$$6 + 4 - 3 = 7 \text{ и } 7 + 1 - 2 = 6, \text{ а затем:}$$

$$7 - 6 = 1.$$

Если перед скобками стоит знак +, то на скобки можно не обращать никакого внимания; действительно сумма:

$$(4 + 3 - 1) + (5 - 2 + 1)$$

нисколько не изменится, если ее написать в виде:

$$4 + 3 - 1 + 5 - 2 + 1,$$

т. к. будем ли мы производить действие по частям:

$$4 + 3 - 1 = 6 \text{ и } 5 - 2 + 1 = 4$$

при чем получим:

$$6 + 4 = 10,$$

или же сразу:

$$4 + 3 - 1 + 5 - 2 + 1 = 10,$$

результат получится один и тот же.

Но если перед скобками стоит знак минус, то мы можем уничтожить скобки, изменив предварительно все знаки перед членами выражения, заключенного в скобках.

Так, напр.,

$$4 + 3 - 1 - (5 - 2 + 1);$$

если вычислить скобки в отдельности то найдем

$$6 - 4 = 2.$$

Этот же результат получится, если мы изменим все знаки выражения $5 - 2 + 1$ и затем отбросим скобки; действительно:

$$4 + 3 - 1 - 5 + 2 - 1 = 2.$$

То, что мы сейчас делали, называется раскрытием скобок.

Может случиться, что нам приходится объединить в одно новое выражение такое выражение, которое уже содержит скобки,; тогда приходится пользоваться новыми скобками несколько иной формы, напр., [ ]. Пусть у нас имеются два выражения:

$$(4 + 1) - (5 - 3) \text{ и } (10 - 6) - (3 - 2).$$

Если мы хотим из первого выражения, как из одного целого, вычесть второе выражение, как одно целое, мы напишем это так:

$$[(4 + 1) - (5 - 3)] - [(10 - 6) - (3 - 2)].$$

Сначала мы раскрываем все внутренние скобки, а затем наружные:

$$4 + 1 = 5; \; 5 - 3 = 2; \; 10 - 6 = 4; \; 3 - 2 = 1.$$

$$[5 - 2] - [4 - 1] = 3 - 3 = 0.$$

Мы могли бы постепенное раскрытие скобок изобразить в следующем виде: $[(4 + 1) - (5 - 3)] - [(10 - 6) - (3 - 2)] =$

$$= [4 + 1 - 5 + 3] - [10 - 6 - 3 + 2] =$$

$$= 4 + 1 - 5 + 3 - 10 + 6 + 3 - 2 = 0$$

Если и эти скобки [ ] желают заключить в другие скобки, то употребляют { }, напр.,

$$18 - \{10 + [8 - (12 - 6)]\}.$$

Раскрытие скобок должно делаться постепенно; сначала малые ( ), затем средние [ ] и наконец большие { }.

$$12-6=6;\ 8-6=2;\ 10+2=12;\ 18-12=6$$

Мы могли бы написать этот результат и в другом виде, производя постепенное раскрытие скобок, идя от больших { } к средним [ ] и затем малым ( ), посредством изменения всех знаков внутри соответствующих скобок, если перед ними стоит минус, и не меняя этих знаков, а просто откидывая скобки, если стоит плюс:

$$18-10-[8-(12-6)]=8-8+(12-6)=12-6=6.$$

Пример.

$$8-\{x-[12-(1-x)]\}=?$$

$$8-x+[12-1+x]=8-x+11+x=19.$$

Задачи.

27. Вычтите: 6 м. из 12 м.; $6X^2$ из $12X^2$; 7 кило из 23 кило; $7D$ из $23D$.

28. Вычтите: $-15°$ из $14°$; $-20m$ из $30m$; -6 из 12; $-18A$ из $12A$.

29. Определите следующие разности:

$$4-10;\ 6X-3X;\ 6D-12D;\ -3a^2-(-12a^2).$$

$$5 \text{ кгр.} -(+13 \text{ кгр});\ -7D^2-22D^2;\ -5-(-15).$$

30. Вычтите:

6 м. 400 мм. из 10 м. 600 мм.

$6a+4b$ из $10a+6b$;

$3x+2y$ из $4x-2y$,

$2m-3n$ из $3m-7n$.

31. Вычтите:

$3a-2$ из a^2-2a+1;

$4x+6$ из x^2+6;

$2D-1$ из D^2;

a^2-b^2 из $a^2+2ab+b^2$.

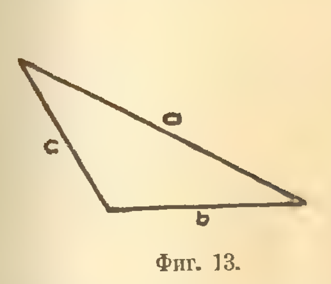
32. Определите: $(7x^2-1)-(3x+2)$.

33. Раскройте скобки и упростите выражения:

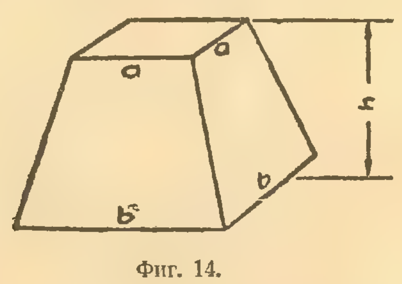
$$(3\tfrac{1}{7}D+9)-(D+6)+3(D-1)=?$$

$$5-\{[(2x+3)-3(x-7)]-[4(x+3)-(x+2)]\}.$$

34. Если назвать через a, b, c длины сторон треугольника (фиг. 13) и через p полусумму всех сторон $(p=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c)$



Фиг. 13.



Фиг. 14.

или иначе полупериметр треугольника, то тогда площадь его определяется по следующей формуле:

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Определите эту площадь при $a=32$ м.; $b=20$ м. и $c=18$ м.

35. Другая формула для определения той же площади треугольника такова:

$$A=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}.$$

Проверьте по этой формуле предыдущее вычисление.

36. На фиг. 14 показана правильная усеченная пирамида с квадратными основаниями. Сторона верхнего основания a, нижнего основания b, высота h. Полная поверхность всех шести граней определяется по формуле:

$$A=a^2+b^2+(a+b)\sqrt{(b-a)^2+4h^2}.$$

Определите эту поверхность при $a=100$ мм.; $b=150$ мм.; $h=130$ мм.

37. Формула для объема этой усеченной пирамиды такова:

$$V=(a^2+b^2+ab)\frac{h}{3}.$$

Определите этот объем для тех же данных.

ГЛАВА IV.

Преобразование формул.

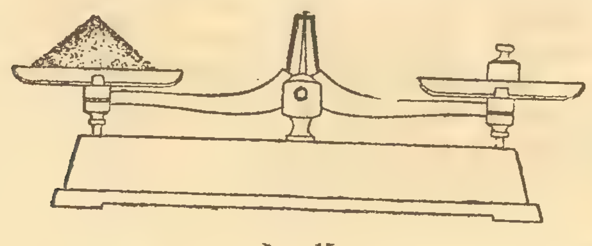
§ 18. Уравнения.

Уравнение есть равенство двух выражений. Напр.,

$W = 1{,}5\,D + 3$ мм.; $C = \pi D$; $x^2 - 2ab = a^2 + b^2$ и т. д. будут уравнениями.

В тех случаях, когда одна из частей уравнения есть искомая величина, мы имеем формулу для этой величины.

Первое из написанных выше уравнений есть формула для W, второе—формула для C, третье—уравнение для x. Но первая формула служит уравнением для D в зависимости от W, вторая—для D в зависимости от C, что касается третьего уравнения, то его нельзя назвать формулой, так как искомая величина x должна еще быть получена путем последующих операций, о которых мы пока умалчиваем. Итак, уравнение может еще быть



Фиг. 15.

названо обобщенной формулой, а формула—упрощенным уравнением. Вообще же не будет ошибкой, если мы скажем, что такая то величина определяется из данного уравнения вместо того, чтобы сказать из данной формулы.

Обе части уравнения—левая и правая, всегда должны оставаться равными: увеличивая одну на некоторую величину, мы должны увеличить и другую на ту же величину, точно так же, как и при взвешивании на весах (фиг. 15); когда груз уравновешен гирями, то для сохранения равновесия мы можем на обе чашки прибавлять лишь равные грузы (или же снимать одинаковые веса).

§ 19. Преобразование уравнений.

Изменение внешнего вида уравнения, делающее его удобным для тех или иных целей, называется преобразованием; возможны, разумеется, лишь такие изменения, которые не нарушают равенства между правой и левой частью.

Если посредством преобразования формулы мы выводим другую формулу, то это есть пример преобразования уравнений.

Напр., формула, дающая площадь круга по диаметру:

$$A = 0{,}7854\ D^2,$$

может быть преобразована в другую:

$$D = \sqrt{\frac{A}{0{,}7854}}$$

Это вторая формула дает диаметр круга по его площади.

Преобразование, дающее искомую величину в зависимости от других, или иными словами, формулу для этой величины, называется решением уравнения.

§ 20. Перестановка членов уравнений.

Перенесение членов из одной части уравнения в другую называется перестановкой.

На фиг. 16 показан прут длиною в 10 см. с пометкой в расстоянии 3 см. от правого конца; таким образом от этой пометки до левого конца прута остается 7 см. Мы можем написать равенство:

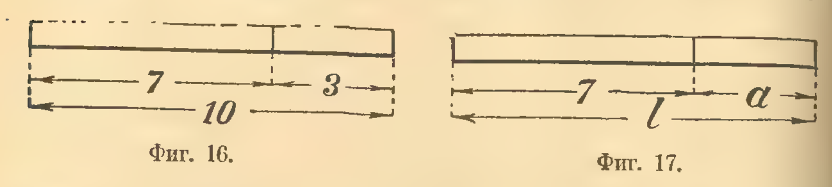
$$10\ \text{см.} = 3\ \text{см.} + 7\ \text{см.}$$

Если мы от полной длины прута отнимем одну из частей, напр., 7 см., то мы получим другую часть; это даст нам равенство:

$$10 \text{ см.} - 7 \text{ см.} = 3 \text{ см.}$$

Взгляните теперь на оба равенства: в них член, который перешел из одной части в другую, переменил свой знак.

На фиг. 17 показан тот же прут, но длиною l см. и с по



Фиг. 16.

Фиг. 17.

меткой в расстоянии a см. от правого конца, однако, до левого конца остаются те же 7 см.

В данном случае мы пишем уравнение:

$$l = a + 7$$

и получаем:

$$l - 7 = a$$

или же

$$l - a = 7.$$

Опять-таки при перестановке члена из одной части уравнения в другую пришлось переменить его знак.

Отсюда мы выводим то правило, что всякий член уравнения может быть перенесен из одной части уравнения в другую, причем должен быть изменен его знак.

Это правило может быть пояснено еще следующим образом: если к двум равным величинам мы прибавим по равной величине, то мы при этом не нарушим равенства. Допустим, что мы имеем уравнение:

$$a = l - 7.$$

Прибавим к обеим частям по 7, это даст:

$$a + 7 = l,$$

т.-е. мы этим путем перенесли 7 из правой части уравнения в левую, но пришлось изменить его знак.

Мы знаем, что формула, дающая длину окружности по диаметру (или уравнение, связывающее окружность с диаметром) такова:

$$C=\pi D.$$

Отсюда легко вывести, что:

$$C:\pi=D.$$

Мы, таким образом, преобразовали формулу, перенеся π из правой части уравнения в левую, но в правой части π было множителем, в левой оно стало делителем; деление, как известно, является действием обратным умножению, поэтому и в этом случае мы можем сказать, что при перестановке мы изменили действие на обратное.

Чтобы преобразовать уравнение

$$C=\pi D \text{ в } C:\pi=D$$

достаточно разделить обе части на π; если бы нам было дано уравнение в его второй форме, то нам пришлось бы помножить обе части на π. Вышеизложенное вытекает из правила, что при умножении или делении двух равных величин на одну и ту же величину равенство не нарушается

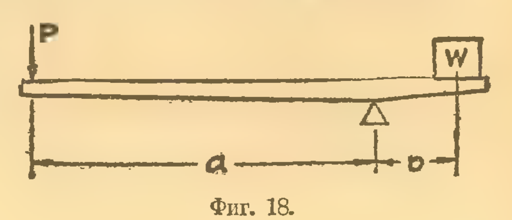
Примеры.

1. Правило рычага гласит: „Произведение силы на ее плечо равно произведению груза на его плечо". Это даст нам выражение:

$$Pa=Wb$$

Если мы хотим определить груз W, который данная сила P уравновешивает, то для этого мы должны обе части уравнения разделить на b. Это даст (фиг. 18):

$$\frac{Pa}{b}=W.$$



Фиг. 18.

Если мы хотим определить силу P, нужную для уравновешивания данного груза W, то мы должны разделить обе части уравнения на a, что даст:

$$P=\frac{Wb}{a}.$$

2. Формула, дающая отверстие ключа для болтов различных диаметров, будет:

$$W = 1{,}5D + 3 \text{ мм.}$$

Выведите отсюда формулу для диаметра D в зависимости от W, т.-е. преобразуйте данное уравнение в другое, где D стоит отдельно.

Сначала мы переносим постоянный член 3 из правой части в левую; это даст:

$$W - 3 = 1{,}5D.$$

Затем делим обе части уравнения на 1,5, что равносильно умножению на $\frac{2}{3}$ (т. к. $\frac{2}{3}$ есть обратная величина от $\frac{3}{2}$); это даст:

$$\frac{2}{3}(W - 3) = D.$$

Это и будет преобразованная формула.

Если размер головки $W = 1\frac{1}{4}$ дм. $= 32$ мм., то, подставив, получим:

$$D = \frac{2}{3}(32 - 3) = \frac{2}{3} \times 29 = 19 \text{ мм.} = \frac{3}{4} \text{ дм.}$$

Существуют еще два действия, которые приходится применять при преобразовании уравнений, это—извлечение корня и возвышение в степень; обе эти операции противоположны друг другу.

Пример. Формула площади круга по диаметру, как известно:

$$A = 0{,}7854\ D^2.$$

Разделим обе части уравнения на 0,7854; это даст:

$$\frac{A}{0{,}7854} = D^2.$$

Но мы ищем не D^2, а D; для это нужно извлечь квадратный корень из обеих частей, что даст:

$$\sqrt{\frac{A}{0{,}7854}} = D.$$

Обратным образом, если бы нам пришлось преобразовать формулу:

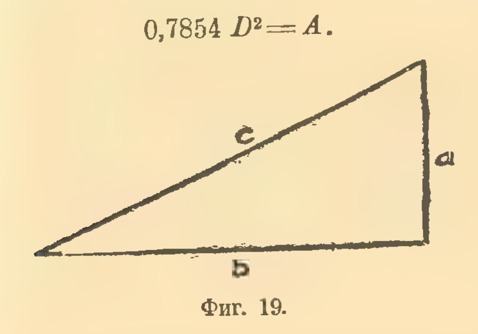
$$D = \sqrt{\frac{A}{0{,}7854}}$$

в такую, которая давала бы A, то мы должны возвысить обе части уравнения в квадрат, что даст:

$$D^2 = \frac{A}{0{,}7854},$$

а затем помножим обе части на 0,7854 и получим:

$$0{,}7854\, D^2 = A.$$



Фиг. 19.

Другой пример такого преобразования будет — нахождение катета прямоугольного треугольника (фиг. 19), если даны гипотенуза и другой катет, при чем мы воспользуемся формулой:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

т.-е. квадрат гипотенузы равен сумме квадратов обоих катетов [1]). Затем переносим b^2 (с переменой знака) влево:

$$c^2 - b^2 = a^2.$$

Наконец, извлекаем квадратный корень из обеих частей:

$$\sqrt{c^2 - b^2} = a.$$

[1]) Приведенное соотношение между сторонами прямоугольного треугольника носит название теоремы Пифагора; греческий философ и математик Пифагор жил за 500 лет до начала нынешнего летосчисления.

§ 21. Правила для преобразования уравнений.

Член уравнения может быть перенесен из одной части в другую с переменой знака на обратный. Равенство не нарушается в следующих случаях:

1) если от равных величин отнять равные величины;
2) если к равным величинам прибавить равные величины;
3) если равные величины разделить на равные величины;
4) если равные величины помножить на равные величины;
5) если равные величины возвысить в одинаковую степень;
6) если из равных величин извлечь одинаковые корни.

§ 22. Сокращения.

Если в обеих частях уравнения встречаются одинаковые члены, то мы можем их исключить, не нарушая равенства; это очевидно из того факта, что мы всегда можем от равных величин отнять равные величины, не изменяя равенства; так напр., уравнение:

$$y + 2a = 3x + 2a$$

равносильно уравнению:

$$y = 3x.$$

Если в обеих частях уравнения встречаются одинаковые множители, то мы можем отбросить такие множители: это следует из того, что мы всегда можем разделить равные величины на равные величины, не нарушая равенства; так, напр., уравнение:

$$0{,}7854\,D^2 = 0{,}7854\,d_1^2 + 0{,}7854\,d_2^2$$

равносильно уравнению

$$D^2 = d_1^2 + d_2^2.$$

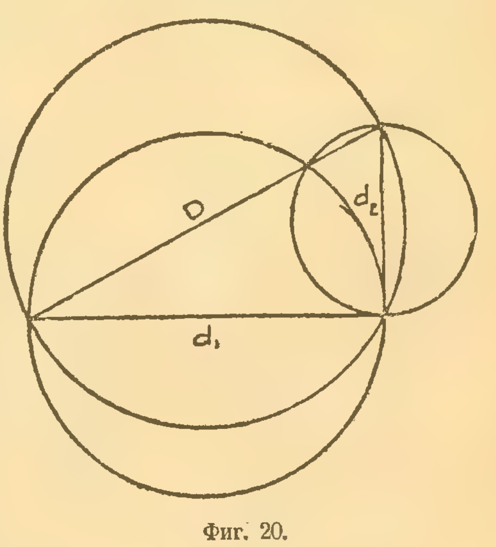
Пример. Определить диаметр трубы, равновеликой двум другим трубам.

Так как площадь большой трубы выражается через $0{,}7854\,D^2$ и равна сумме площадей обеих малых труб с диаметрами d_1 и d_2, то мы получаем только-что преобразованное (§ 22) нами уравнение.

Искомый же диаметр будет:

$$D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}.$$

Полученная нами формула тождественна с формулой, дающей гипотенузу по двум катетам; отсюда мы можем вывести очень простой способ для графического определения искомого диаметра, то-есть посредством чертежа.



Фиг. 20.

На фиг. 20 показано, как надо поступать в таком случае. Мы строим прямой угол и по сторонам его откладываем d_1 и d_2 в виде катетов прямоугольного треугольника, гипотенуза которого будет искомый диаметр D. На чертеже вычерчены все три окружности.

§ 23. Перемена всех знаков уравнения.

Иногда, преобразовывая уравнения, мы получаем знак минус (—) перед искомой величиной, напр.,

$$-x = -2a + 3$$

Перенесем левую часть вправо, а всю правую часть влево; тогда мы должны будем изменить все знаки, что даст:

$$2a - 3 = x,$$

но это совершенно одно и то же, что:

$$x = 2a - 3.$$

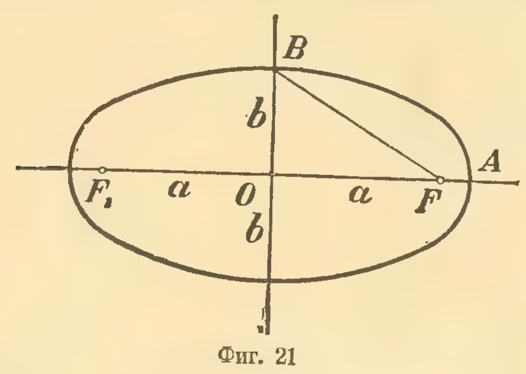
Следовательно, изменение всех знаков на обратные (— на + и + на —) нисколько не нарушает равенства.

Задачи.

38. Скорость v резания[1]) на токарном станке равна окружности C обрабатываемого предмета, помноженной на число оборотов его в минуту, т.-е. $v = CN$; требуется определить по этой формуле N, если известно, что диаметр предмета=90 мм. а скорость резания=18 метр. в минуту.

Примечание. Сначала преобразуйте формулу так, чтобы она давала N через v и C; не забудьте, что v и C должны быть выражены в одних и тех же мерах, т.-е. либо в миллиметрах, либо в метрах

39. На фиг. 21 нарисована фигура, называемая эллипсом. Длина $2a$ есть его большая ось, а $2b$—малая, длины a и b назы-



Фиг. 21

ваются большою и малою полуосью. Площадь такого эллипса определяется из формулы:

$$A = \pi ab = 3{,}1416\ ab.$$

Найдите большую ось, если известно, что малая = 10 см., а площадь = 200 кв. см.

40. Общая площадь стен комнаты определяется из формулы:

$$A = 2H(L + B),$$

где H—высота комнаты. а L и B—длины стен. Найдите высоту, если известно, что $A = 67$ кв. м., $L = 6$ м., и $B = 4{,}5$ м

[1]) Скорость резания определяется тем расстоянием, какое точка, лежащая на обрабатываемой поверхности предмета, проходит в одну минуту.

41. Формула площади трапеции (§ 6):

$$A = \frac{1}{2}(b + b')h,$$

где b — нижнее основание, b' — верхнее основание и h — высота. Определите b, если известно, что $A = 8$ кв. м., $b' = 2,4$ м., а $h = 2,7$ м.

42. Формула, дающая число лошадиных сил (N), которое может передать кожаный ремень, имеет следующий вид:

$$N = \frac{PWV}{75},$$

где P — сила в кгр., которую может передать 1 мм. ширины ремня, W — ширина ремня в миллиметрах, а V — скорость ремня в метрах в секунду. Определите W, если известно, что $N = 50$ л. с. $V = 20$ метр. в сек, а $P = 1,5$ кгр. на 1 мм. ширины.

43. Формула для отверстия ключа для болтов различных диаметров такова:

$$W = 1,5\,D + 3 \text{ мм.}$$

Определите D, если $W = 1\frac{13}{16}$ дм.

44. Формула для объема шара:

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Преобразуйте ее в формулу для диаметра D через V.

45. Кубический сантиметр чугуна весит 7,2 грамма. Напишите формулу, дающую вес чугунного шара, диаметром D.

46. Из предыдущей формулы, дающей вес чугунного шара, определите диаметр D, если известно, что вес шара 7,2 кгр.

47. Площадь сечения эллиптической трубы (фиг. 21) определяется по формуле:

$$A = 3,1416\,ab.$$

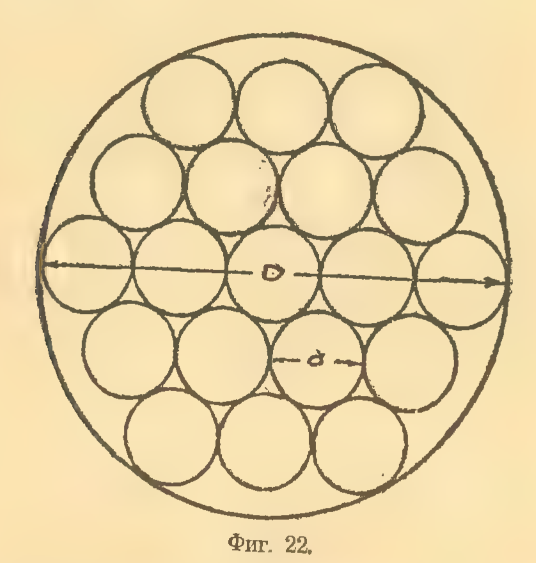
Замените эту трубу обыкновенной круглой трубой того же сечения и диаметра d. Какая зависимость будет существовать между величинами d, a и b?

48. На фиг. 22 показано сечение сложного электрического кабеля с проводами, расположенными внутри. Приближенная формула, выражающая число проводов диаметра d, расположенных внутри кабеля диаметра D:

$$N = 0{,}907\left(\frac{D}{d} - 0{,}94\right)^2 + 3{,}7.$$

Преобразуйте ее в формулу, дающую D в зависимости от N и d.

49. Измерьте на фиг. 22 длину диаметров D и d в миллиметрах и с полученными числами проверьте правильность формулы, приведенной в предыдущей задаче.



Фиг. 22.

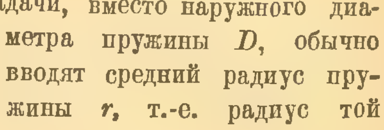
50. На фиг. 23 показана круглая стальная спиральная пружина из проволоки до и после подвески груза. Величина растяжения F получается из формулы:

$$F = \frac{N\,W\,(D-d)^3}{760\,d^4},$$

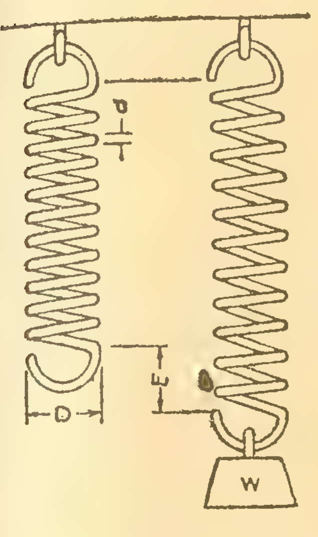
где груз W выражен в кгр., диаметры: общий D и проволоки d — в миллиметрах, а N есть число витков спирали.

Преобразуйте эту формулу в формулу для W.

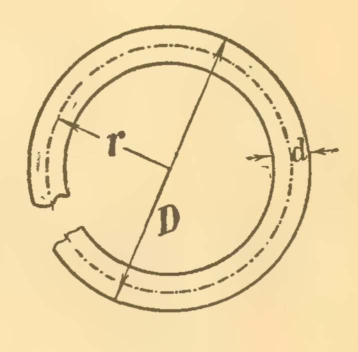
51. В формулу предыдущей задачи, вместо наружного диа-



метра пружины D, обычно вводят средний радиус пружины r, т.-е. радиус той



Фиг. 23.



Фиг. 24.

окружности, на которой лежат центры сечений проволоки (см. фиг. 24).

Введите в указанную формулу вместо диаметра D радиус r.

ГЛАВА V.

Алгебраическое умножение и деление.

§ 24. Умножение.

В алгебре умножение производится подобно тому, как в арифметике для именованных чисел, напр.:

$$\begin{array}{c} 5 \text{ м. } 30 \text{ см.} \\ \times 3 \\ \hline 15 \text{ м. } 90 \text{ см.} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 4 \text{ кгр. } 10 \text{ гр.} \\ \times 2 \\ \hline 8 \text{ кгр. } 20 \text{ гр.} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 5\,x + 30\,y \\ +3 \\ \hline 15\,x + 90\,y \end{array} \qquad \begin{array}{c} 4\,m + 10\,n \\ \times 2 \\ \hline 8\,m + 20\,n \end{array}$$

В арифметике 3 м. $\times$ 4 м. = 12 кв. м. а в алгебре $3a \times 4a = 12a^2$. Подобным образом:

$$a^4 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$$

$$3a^3 \times 2a^2 b = 3 \times 2 \times a \times a \times a \times a \times a \times b = 6a^5 b.$$

$$\pi D \times \frac{\pi D^2}{4} = \pi \times \pi \times D \times D \times D \times \frac{1}{4} = \frac{\pi^2 D^3}{4}.$$

Если вы рассмотрите эти примеры, то для вас станут ясными следующие правила: „Коэффициент произведения равен произведению коэффициентов множителей. В произведение входят все буквы, имеющиеся в множителях. Если одна и та же буква встречается в различных множителях, то она войдет в произведение с показателем, равным сумме показателей, которые эта буква имеет в каждом множителе“.

25. Деление.

Так как $a^2 \times a^4 = a^6$, то следовательно: $a^6 : a^2 = a^4$, или же $a^6 : a^4 = a^2$. Подобным же образом $6R^2 : 2R = 3R$; $8a^2 b : 2ab = 4a$; $12x^2 y^3 : 4xy^2 = 3xy$.

Когда делимое и делитель содержат одни лишь одинаковые буквы, результат деления получается непосредственно; если же делитель содержит также другие буквы, то деление не может быть окончено; оно может быть лишъ обозначено подобно тому, как в арифметике обозначаются дроби, являющиеся незаконченным делением.

Напр.,

$$2 : 7 = \frac{2}{7},$$

подобным образом

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

Так же, как в арифметике, дроби сокращаются делением числителя и знаменателя на общие множители.

Напр. $$24 : 32 = \frac{24}{32} = \frac{3 \times 8}{4 \times 8} = \frac{3}{4}$$

$$18a^3b^2c : 6a^2c = \frac{18a^3b^2c}{6a^2c} = 3ab^2; \quad 4x^2y : 2x^3y = \frac{4x^2y}{2x^3y} = \frac{2}{x}.$$

§ 26. Правило знаков.

Как при умножении, так и при делении одинаковые знаки дают (+), а разные знаки дают (—).

То, что произведение двух положительных величин будет положительная величина, не требует объяснения; но в случае отрицательных величин правило может возбудить некоторое сомнение; чтобы пояснить это, приведем следующие сравнения.

Допустим, что часы, уходящие вперед на 6 сек. в час, показывают в полдень верное время; до полдня эти часы были **назади** против верного времени, после полдня — **впереди**. Такие часы требуют поправки в — 6 сек. для каждого часа. Их поправка

спустя два часа после полдня, т. е. в 2 часа дня, будет—12 сек.; мы обозначаем это так:

$$-6 \times 2 = -12$$

Поправка часов в 10 часов утра, т, е. за два часа до полдня, была $+12$ сек.; это обозначается так:

$$(-6) \times (-2) = +12$$

Легко видеть, что:

$$(+6)\times(+2)=(+12)$$
$$(-6)\times(+2)=(-12)$$
$$(+6)\times(-2)=(-12)$$
$$(-6)\times(-2)=(+12)$$

$$(+12):(+2)=(+6)$$
$$(-12):(+2)=(-6)$$
$$(-12):(-2)=(+6)$$
$$(+12):(-2)=(-6)$$

§ 27. Умножение многочленов.

При умножении некоторого выражения, имеющего два или больше членов, на одночлен, мы множим каждый член этого выражения на множителя:

Примеры.

1. $$\begin{array}{r} 4a^2+4ab+b^2 \\ \times a^2 \\ \hline 4a^4+4a^3b+a^2b^2 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} h_1+h_2 \\ \times \pi r^2 \\ \hline \pi r^2h_1+\pi r^2h_2 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} D^2-d^2 \\ \times \pi \\ \hline \pi D^2-\pi d^2 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{r} x^2-2x+1 \\ \times (-x) \\ \hline -x^3+2x^2-x \end{array}$$

Если требуется помножить многочлен на другой многочлен, то мы множим в отдельности каждый член множимого на каждый член множителя и затем берем алгебраическую сумму. Для удобства подобные члены располагаются один под другим. Лучше всего понять механизм умножения на примерах.

Пример 1.

$$(a^2+2a+1)\ (a-1)=?$$

$$\begin{array}{r} a^2+2a+1 \\ a-1 \\ \hline a^3+2a^2+a \\ -a^2-2a-1 \\ \hline a^3+a^2-a-1 \end{array}$$

Объяснение. Расположив множитель $(a-1)$ под множимым, мы множим последнее сначала на a, это даст (a^3+2a^2+a); затем умножаем на (-1), что даст выражение $(-a^2-2a-1)$, которое располагается под первым и складывается с ним.

Пример 2.

$$(a-b)\ (c-d)=?$$

$$\begin{array}{r}
a-b \\
c-d \\ \hline
ac-bc \quad\quad\quad\quad \\
-ad+bd \\ \hline
ac-bc-ad+bd
\end{array}$$

Объяснение. Действие производится так же, как и раньше, но так как все члены различны, результат получается без всяких упрощений и представляет просто сумму всех частичных произведений.

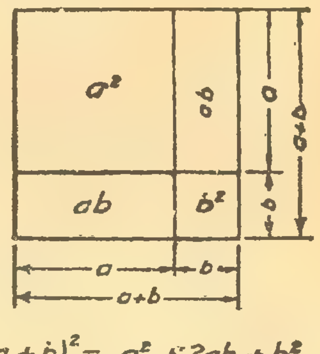
3. $(x^2+y^2)\ (x^2-y^2)=?$

$$\begin{array}{l}
x^2+y^2 \\
x^2-y^2 \\ \hline
x^4+x^2y^2 \\
\quad\quad -x^2y^2-y^4 \\ \hline
x^4 \quad\quad\quad\quad -y^4
\end{array}$$

4. $(2x^3-3x^2+4x-5)\ (x^2-2x-3)=?$

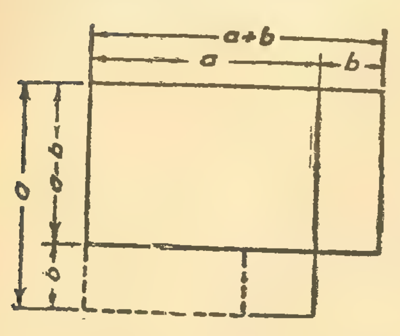
$$\begin{array}{r}
2x^3-3x^2+4x-5 \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
x^2-2x-3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline
2x^5-3x^4+4x^3-5x^2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
-4x^4+6x^3-8x^2+10x \quad\quad \\
-6x^3+9x^2-12x+15 \\ \hline
2x^5-7x^4+4x^3-4x^2-2x+15
\end{array}$$

Иногда нетрудно представить результат умножения двучлена на двучлен графически. Так, напр., $(a+b)^2$ (фиг. 25) изображает собою квадрат со стороною $(a+b)$; легко видеть, что результат умножения даст: $a^2+2ab+b^2$, где a^2 и b^2 — площади двух квадратов, а $2ab$ — площадь двух прямоугольников.

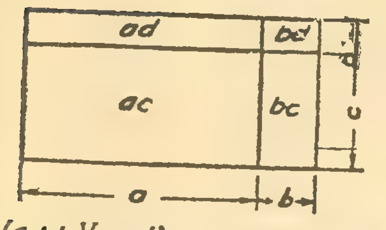


Фиг. 25.

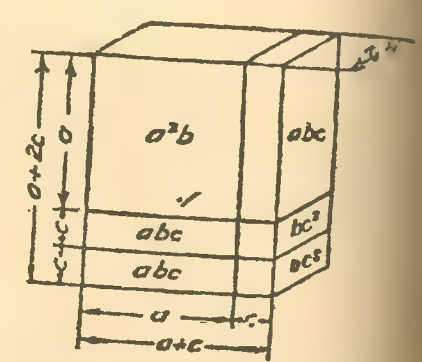
На фиг. 26 графически представлен результат умножения $(a+b)$ на $(a-b)$. С одной стороны, это площадь прямоугольника со сторонами $(a+b)$ и $(a-b)$, а с другой, мы можем представить себе результат, как разность площадей двух квадратов a^2 и b^2. Построение, показывающее это, сделано пунктиром.



Фиг. 26.



Фиг. 27.



Фиг. 28.

На фиг. 27 показано произведение:

$$(a+b)\ (c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

На фиг. 28 показан объем, соответствующий произведению:

$$(a+2c)\ (a+c)\ b=a^2b+3\,abc+2bc^2.$$

§ 28. Деление многочленов.

Сначала сделаем несколько примеров деления многочленов на одночлены, а затем многочленов на многочлены. В обоих случаях действие весьма сходно с арифметическим делением.

Примеры.

1. 10 кгр. 60 гр. | 2 — частное: 5 кгр. 30 гр.

$$10x+60y \;\big|\; 2 \qquad \text{частное: } 5x+30y$$

$$2x^3-6x^2-10x \;\big|\; 2x \qquad \text{частное: } x^2-3x-5$$

$$a^2-2ab+b^2 \;\big|\; (-a) \qquad \text{частное: } -a+2b-\frac{b^2}{a}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^2+2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2}
-x^2-x & x+1 \\ \cline{1-1}
x+1 & \\
-x-1 & \\ \cline{1-1}
0. &
\end{array}$$

Объяснение. Делим первый член делимого на первый член делителя; получаем первый член частного (x), множим (x) на делителя и результат вычитаем из делимого (мы показали изменение знаков у вычитаемого, которое после этого алгебраически складывается с уменьшаемым). После того, как мы получили разность, мы снова делим ее на первый член делителя, пока не получим остаток или 0

2. $(x^2-8x+16):(x-4)=?$

$$\begin{array}{r|l}
x^2-8x+16 & x-4 \\ \cline{2-2}
-x^2+4x & x-4 \\ \cline{1-1}
-4x+16 & \\
+4x-16 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

3. $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1}=?$

$$\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2+3x+1 & x+1 \\ \cline{2-2}
-x^3-x^2 & x^2+2x+1 \\ \cline{1-1}
2x^2+3x & \\
-2x^2-2x & \\ \cline{1-1}
x+1 & \\
-x-1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

4. $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a-b}=?$

$$\begin{array}{r|l}
a^2-2ab+b^2 & a-b \\ \cline{2-2}
-a^2+ab & a-b \\ \cline{1-1}
-ab+b^2 & \\
+ab-b^2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

5. $\dfrac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a+b}=?$

$$\begin{array}{r|l}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a+b \\ \cline{2-2}
-a^3-a^2b & a^2+2ab+b^2 \\ \cline{1-1}
2a^2b+3ab^2 & \\
-2a^2b-2ab^2 & \\ \cline{1-1}
ab^2+b^3 & \\
-ab^2-b^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Если деление без остатка не получается, то обыкновенно пишут делимое и делитель в виде дроби (или в виде целого многочлена + дробь).

§ 29. Разложение на множителей.

Если все члены многочлена имеют общий множитель, то его можно вынести за скобки, напр.,

$$\pi D + \pi d = \pi (D + d);$$

$$0{,}7854\, D^2 - 0{,}7854\, d^2 = 0{,}7854\, (D^2 - d^2).$$

Как только общий множитель найден, то многочлен делят на него и частное берут вторым множителем.

Пример. Разложите на множители: $3m^3 + 3m^2n + 3mn^2$.

Один из общих множителей будет $3m$.

$$3m^3 + 3m^2n + 3mn^2 \;\Big|\; \frac{3m}{m^2 + mn + n^2}$$

Разложение даст:

$$3m\,(m^2 + mn + n^2).$$

Иногда приходится брать за скобки общий множитель некоторой части многочлена и другой множитель для остающейся части: после этого может оказаться, что имеется общий множитель для всего выражения, который сразу не мог быть замеченным.

Пример. Разложите на множители: $ca + bc + ad + bd$.

Мы можем взять c за скобки у первых двух членов, что даст $c\,(a + b)$ и d — за скобки у вторых двух членов, что даст $d\,(a + b)$. Таким образом: $ca + bc + ad + bd = c\,(a + b) + d\,(a + b)$. А теперь обнаружился общий множитель всего выражения, а именно: $(a + b)$; беря его за скобки, получим: $(a + b)\,(c + d)$.

Это и есть разложение на множители данного многочлена.

Для разложений на множители не может быть дано общего правила; это дело навыка и чутья.

Задачи.

Помножьте:

52. 6 м. 5 см. на 2.
    $6x + 5y$ на 3.
53. $2a + 3b$ на $2b$.
    $5m - 3n$ на $(-2p)$.
54. $a + 2b$ на $a + b$.
    $a - 3b$ на $a - b$.

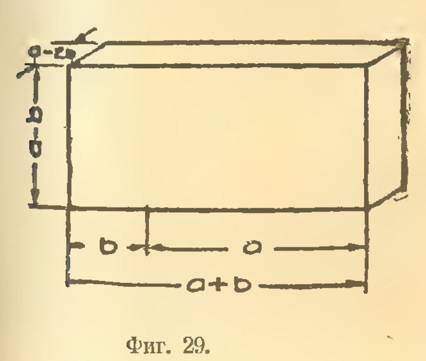
Разделите:

55. 27 м. на 3 м.
56. 16 кв. м. на 2 м.
57. 16 кв. м. на 2 кв. м.
    16 a^2 на $2a$.
58. $3a^2b^3$ на $2ab$.
59. $3a^2b - 2ab^2$ на ab.
60. $3x - 4xy + xz$ на $(-x)$.
61. $a^2 - a - 12$ на $a + 3$.
62. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ на $x - 2$.

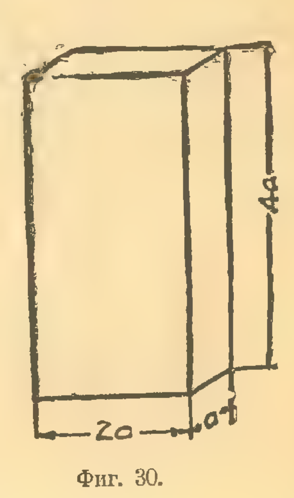
Разложите на множителей:

63. $\frac{\pi}{4}D^2 - \frac{\pi}{4}d^2$.
64. $0{,}315\ a^3 + 0{,}315\ a^2b$.
65. $\pi r^2 a + \pi r^2 b$.
66. $\frac{\pi}{4}D^2 l - \frac{\pi}{4}d^2 l$.

67. Предмет имеет длину $(a+b)$, ширину $(a-b)$ и толщину $(a-2b)$. Определите объем его (фиг. 29).



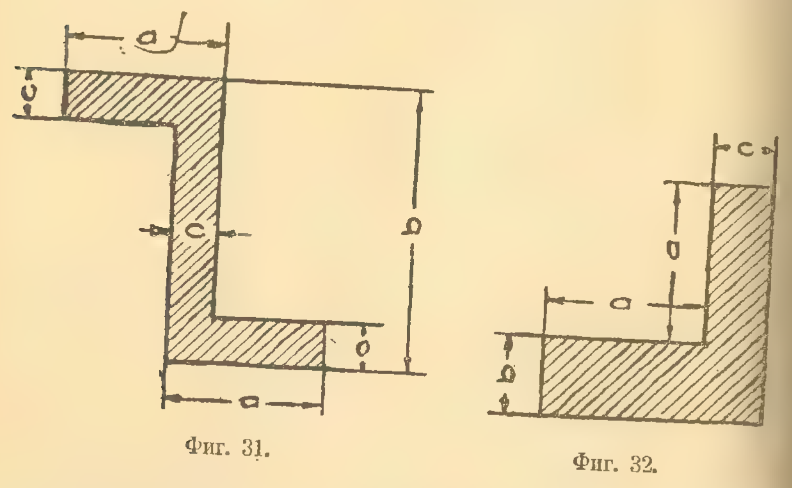
Фиг. 29.



Фиг. 30.

68. Стальная болванка (фиг. 30) имеет толщину a см., ширину $2a$ см. и высоту $4a$ см. Каковы будут действительные размеры этой болванки в сантиметрах, если ее вес равен 1 тонне, принимая вес 1 куб. см. стали за 8 гр.

69. На фиг. 31 представлено сечение в виде буквы Z. Выведите формулу а) для поперечной площади этого сечения; б) для объема одного погонного метра балки этого сечения; в) для



Фиг. 31.

Фиг. 32.

веса одного погонного метра стальной балки. Решите числовой пример, принимая: $a = 50$ мм. $b = 100$ мм. $c = 6$ мм. и удельный вес стали $= 7{,}8$ гр.

70. На фиг. 32 представлено сечение в виде буквы L (угловое). Выведите формулу для поперечной площади этого сечения.

ГЛАВА VI.

Решение простых уравнений.

§ 30. Составление уравнений.

Уравнения важны в особенности тогда, когда решение задачи простыми арифметическими приемами кажется сложным или запутанным. Иногда взаимоотношения между данными величинами и искомой не особенно легко заметны, и действия, которые надо произвести над числами, не сразу бросаются в глаза. В таких случаях гораздо проще вместо того, чтобы ломать себе голову над решением задачи арифметическим путем, назвать искомое какой-нибудь буквой, напр., x и обозначить зависимость, существующую, на основании условий задачи, между искомой величиной и данными величинами, посредством математических знаков. Это приведет нас к уравнению, из которого неизвестная величина определяется очень легко, посредством немногих и общих правил: в этом большое преимущество алгебры над арифметикой.

Пример 1. Три трубы наполняют бак вместимостью в 600 литров. Вторая труба даст на 100 литров больше, чем первая, а третья,—в три раза больше, чем первая труба. Спрашивается, сколько литров дает каждая труба?

Вполне естественно выбрать за неизвестную величину то количество литров, которое дает первая труба. Обозначим это количество через x. Тогда вторая труба по условию задачи даст $(100+x)$ литров, а третья труба даст $3x$ литров. Вместе все три трубы дадут $x+(100+x)+3x$ литров. Поэтому мы можем составить уравнение:

$$x+100+x+3x=600,$$

или

$$5x+100=600,$$

или

$$5x=500,$$

откуда

$$x=100 \text{ литров.}$$

Следовательно, вторая труба даст $100 + 100 = 200$ литров, а третья труба даст $3 \times 100 = 300$ литров.

Действительно, $100 + 200 + 300 = 600$ литров.

Пример 2. В литейной мастерской изготовлено за день 90 отливок: крупных, средних и мелких вместе взятых. Число средних отливок на 4 меньше числа крупных, а число мелких отливок на 10 больше, чем крупных и средних вместе. Спрашивается, сколько было каждаго сорта отливок?

Обозначим, напр., через x число крупных отливок, тогда средних отливок будет $(x - 4)$. Мелких отливок будет, очевидно:

$$x + (x - 4) + 10, \text{ т.-е. } 2x + 6$$

Всего же отливок будет:

$$x + (x - 4) + (2x + 6), \text{ т.-е. } 4x + 2.$$

По условию задачи всех отливок было 90 штук; это даст нам уравнение:

$$4x + 2 = 90.$$

Отсюда

$$x = 22.$$

Следовательно, крупных отливок было 22, средних 18, а мелких 50.

§ 31. Решение уравнений.

Определение неизвестной величины из уравнения называется его решением. Решение получается простым преобразованием уравнения посредством правил, изложенных в главе IV.

Пример. Решить уравнение: $5x - 10 = 3x + 6$.

Перенесем все члены, содержащие x, в одну сторону, а остальные в другую: это даст:

$$5x - 3x = 10 + 6.$$

Сложив члены в каждой части уравнения, получим:

$$2x = 16.$$

Разделим обе части уравнения на коэффициент при x, в данном случае на 2: это даст нам искомую величину

$$x = 8.$$

Как известно, всякая формула есть уравнение, и всякое уравнение, путем преобразования, может принять вид формулы. Если уравнение или формула содержат две различные буквы, то мы не можем получить одновременно численные значения для обеих букв, если не будет существовать особое дополнительное условие относительно этих букв, т.-е. еще другое уравнение. Но это не может помешать нам найти выражение для значений одной из величин через другую. Это делалось нами неоднократно при преобразовании формул.

Если бы имелось три неизвестных, то для решения потребовалось бы три уравнения и т. д. Сколько имеется неизвестных, столько требуется и уравнений: иначе задача является неопределенной.

В рассмотренных выше примерах мы, правда, имели несколько неизвестных величин, но могли воспользоваться только одной буквой x для одного из неизвестных, не вводя других букв, как напр., y и z для других неизвестных; но это не значит, что мы имеем только одно уравнение для определения трех неизвестных; мы, в действительности, имеем столько же уравнений, сколько и неизвестных, т. к. в условии задач были даны добавочные зависимости между всеми неизвестными в достаточном количестве, а это равносильно добавочным уравнениям.

Задачи.

71. Определить x из следующих уравнений:

(a) $2x - 7 = 5$:

(b) $x + 3 = 1$;

(c) $2x - 4 = x - 1$;

(d) $5x - 7 = 6x - 9$.

72. Найдите, чему равняется неизвестная величина из следующих уравнений:

(a) $0{,}7854\, D^2 = 113{,}1$;

(b) $\frac{\pi}{6} D^3 = 250$;

(c) $\frac{6(a+8)}{2}=60;$

(b) $\sqrt{c^2-12^2}=7.$

73. Удвоенное число, увеличенное на 15, равно самому числу, увеличенному на 19. Какое это число?

74. У трех лиц вместе взятых имелось 90 рублей. У второго имелось на 10 рублей меньше, чем у первого, а у третьего на один рубль меньше, чем у второго. Сколько было денег у каждого из них?

75. Сумма двух чисел есть 100, при этом меньшее из чисел на 10 больше, чем половина большего числа. Определить оба числа.

76. На токарном станке предмет обтачивается с окружной скоростью в 12 метров в минуту при 66 оборотах. Определить диаметр предмета.

77. Из резервуара, наполовину наполненнаго нефтью, берут 15 тонн нефти, при этом происходит утечка в размере 0,6% взятаго количества; оказывается, что теперь в резервуаре содержится третья часть полной его емкости. Определить емкость резервуара.

78. Найдите число, которого половина, третья часть и четверть дают вместе это число, увеличенное на две единицы.

79. Два числа относятся друг к другу, как 5 к 7. Половина первого плюс второе равны половине второго плюс 12. Определите оба числа.

80. Латунь с 30% цинка весит 600 кило. Сколько цинка надо добавить к латуни, чтобы содержание его увеличилось до 34%?

ГЛАВА VII.

Совместные уравнения и квадратные уравнения.

§ 32. Совместные уравнения.

Если в одном уравнении находятся две неизвестных величины, то можно лишь найти выражение одной из этих величин через другую; но определить цифровое значение неизвестных посредством лишь одного уравнения нельзя, так как для любого значения каждого из неизвестных другое неизвестное получает соответствующее значение. Пусть, напр., дано уравнение с двумя неизвестными:

$$x + 3y = 17.$$

Это уравнение может быть решено для x выражением его через y, или для y в x, но не может дать ответа на вопрос, чему равны x и y в отдельности, так как для каждого значения y мы имеем определенное значение для x и, наоборот, каждое x даст соответствующее y. Таким образом имеется бесконечное множество решений, но не одно определенное решение, как в случае одного уравнения с одним неизвестным. Уравнение с двумя неизвестными носит название неопределенного уравнения; чтобы сделать его определенным, нужно еще другое совместное уравнение.

После перестановки членов данное выше уравнение принимает вид

$$x = 17 - 3y$$

Подставим вместо y любые произвольные значения, напр., 1, 2, 5, это даст для x:

при $y = 1$, $x = 17 - 3 \times 1 = 14$.

„ $y = 2$, $x = 17 - 3 \times 2 = 11$.

„ $y = 5$, $x = 17 - 3 \times 5 = 2$.

Подобным же образом мы можем решить уравнение для y и подставить любые значения для x.

Из уравнения $3y = 17 - x$ получаем $y = \frac{17-x}{3}$, откуда

$$\text{при } x = 1 \text{ находим } y = \frac{17-1}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3},$$

$$\text{при } x = 2 \qquad y = \frac{17-2}{3} = 5 \text{ и т. д.}$$

Ничто в этом неопределенном уравнении не говорит нам, какие значения для x и y нужно взять.

Но пусть у нас имеется другое „совместное" уравнение, напр.,

$$2x + y = 9,$$

$$\text{откуда } 2x = 9 - y,$$

$$\text{или } x = \frac{9-y}{2}.$$

Попробуем в это уравнение подставить вместо y ряд произвольных величин, напр., 1, 2, 5; это даст для x:

$$y = 1, \quad x = \frac{9-1}{2} = 4.$$

$$y = 2, \quad x = \frac{9-2}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

$$y = 5 \quad x = \frac{9-5}{2} = 2.$$

Если мы теперь сличим решения второго уравнения с решениями первого, то мы заметим, что лишь для $y = 5$ и $x = 2$ оба уравнения „совместно удовлетворены", это и будет искомое решение пары уравнений.

Итак, для определения двух неизвестных мы должны были иметь два уравнения; подобным же образом, для определения трех неизвестных необходимо иметь три совместных уравнения и т. д. Сколько имеется неизвестных, столько требуется и совместных уравнений, иначе задача является неопределенной.

§ 33. Решение совместных уравнений способом подстановки.

Вернемся к примеру о трех трубах, наполняющих бак вместимостью в 600 литров (§ 30, пример 1). Там мы решили задачу посредством введения лишь одного неизвестного: но мы можем решить ее и другим способом, прибегая к трем неизвестным и решая „систему“ трех совместных уравнений.

Повторим задачу: три трубы наполняют бак вместимостью в 600 литров. Вторая труба дает на 100 литров больше, чем первая, а третья — в три раза больше, чем первая. Спрашивается, сколько литров даст каждая труба?

Назовем через x количество литров даваемых первой трубой, через y количество литров, даваемых второй трубой, и через z количество литров, даваемых третьей трубой.

По условию задачи:

$$x + y + z = 600,$$

но, с другой стороны:

$$y = x + 100$$

и

$$z = 3x.$$

Таким образом мы имеем три уравнения для определения трех неизвестных; а потому задача вполне определенного характера.

Чтобы решить ее, подставим выражение для y через x из второго уравнения, а также выражение для z в x из третьего уравнения в первое уравнение; это даст нам:

$$x + (x + 100) + 3x = 600,$$

т.-е.

$$5x + 100 = 600,$$

или

$$5x = 500,$$

откуда

$$x = 100 \text{ литров}.$$

Зная x, мы подставляем его значение во второе и в третье уравнение, что даст:

$$y = 100 + 100 = 200 \text{ литров},$$

$$z = 3 \times 100 = 300 \text{ литров}.$$

Если мы теперь сравним наше решение с ранее данным, то мы увидим, что по существу никакой разницы между обоими способами нет.

Пример. Сумма двух чисел 15, а разность 3; определить эти числа.

Назовем большее из чисел x, а меньшее y; тогда по условиям задачи мы получим два уравнения:

$$x + y = 15,$$

$$x - y = 3.$$

Определим, напр., x посредством y из второго уравнения

$$x = y + 3.$$

Подставим это выражение для x в первое уравнени , это даст:

$$y + 3 + y = 15,$$

т.-е.

$$2y + 3 = 15,$$

или

$$2y = 12,$$

откуда

$$y = 6.$$

Зная y, подставим его значение в любое из уравнений и мы получим x. Подставляя в первое, мы получим:

$$x + 6 = 15,$$

откуда

$$x = 9$$

Если подставим 6 вместо y во второе уравнение, то будем иметь:

$$x - 6 = 3,$$

откуда

$$x = 9.$$

Решим теперь пример немного посложнее способом подстановки. Пусть требуется определить x и y из системы совместных уравнений:

(1) $$2x + 5y = 25,$$

(2) $$3x - 2y = 9.$$

Из первого уравнения определим, напр., y через x и затем подставим результат во второе уравнение; это приведет нас к уравнению с одним неизвестным, которое легко решить, а зная x, мы будем знать и y путем обратной подстановки в одно из уравнений.

Преобразуя первое уравнение, мы получим:

$$5y = 25 - 2x,$$

следовательно,
$$y = \frac{25 - 2x}{5}$$

Подставим это выражение вместо y во второе уравнение:

$$3x - 2 \times \frac{25 - 2x}{5} = 9$$

Помножив обе части уравнения на 5, получим:

$$15x - 2(25 - 2x) = 45,$$

или
$$15x - 50 + 4x = 45,$$

т.-е.
$$19x = 95,$$

откуда
$$x = 5.$$

Подставляя эту величину в уравнение:

$$y = \frac{25 - 2x}{5},$$

мы получим
$$x = 3.$$

§ 34. Способ исключения.

Этот способ очень часто применяется и имеет свои преимущества. Он сводится к следующему: первое уравнение множится на некоторое число, а второе уравнение множится на другое число, при чем эти множители выбираются такими, чтобы новые коэффициенты при одном из неизвестных получились равными.

После этого одно из полученных уравнений вычитается из другого; в результате останется одно уравнение с одним неизвестным, определив которое, нетрудно путем подстановки узнать и второе.

Для примера возьмем только что приведенную систему уравнений:

(1) $$2x+5y=25;$$

(2) $$3x-2y=9.$$

Помножим первое уравнение на 3, а второе на 2:

(1′) $$6x+15y=75,$$

(2′) $$6x-4y=18.$$

Вычтем уравнение (2′) из уравнения (1′):

$$19y=57,$$

откуда $$y=3.$$

Подставив эту величину в (2), получим:

$$3x-2\times 3=9,$$

откуда $$3x=15,$$

следовательно, $$x=5$$

Если мы хотим исключить не x, а y, то помножим (1) на 2, а (2) на 5 и сложим результаты, так как тогда коэффициенты при y будут равны, но с обратными знаками.

Действительно:

(1″) $$(2\times 2)x+(2\times 5)y=2\times 25,$$

(2″) $$(5\times 3)x-(5\times 2)y=5\times 9,$$

т.-е. $$4x+10y=50,$$

и $$15x-10y=45,$$

сложив которые, получим $$19x=95,$$

откуда $$x=\frac{95}{19}=5.$$

Путем подстановки определим:

$$y=3.$$

Пример. Мы имеем железную мелочь, содержащую в среднем 2% кремния, и чугун с 6% кремния; мы желаем составить 100 кгр. смеси со средним содержанием в 3,2% кремния. Сколько требуется для этого взять железа и сколько чугуна?

Назовем через x вес железа в килограммах и через y вес чугуна.

Очевидно,

$$x + y = 100.$$

С другой стороны, вес кремния в железе будет $0{,}02x$, а вес кремния в чугуне $0{,}06y$. Что же касается веса кремния в 100 кгр. смеси, то он будет 3,2 кгр.

Это даст нам второе уравнение:

$$0{,}02x + 0{,}06y = 3{,}2.$$

Для решения этой системы совместных уравнений способом исключения, мы можем, напр., помножить второе уравнение на 50, что даст:

$$x + 3y = 160.$$

Если теперь из второго уравнения вычесть первое, то получим:

$$2y = 60,$$

т.-е. $y = 30$ килограммов чугуна,

и, следовательно: $x = 70$ килограммов железа.

§ 35. Совместные уравнения с тремя неизвестными.

Покажем на примере способ решения такой системы способом исключения. Пусть данные уравнения будут:

(1) $x + y + 2z = 13,$

(2) $2x - y - z = 4;$

(3) $x - y + 2z = 5.$

Если к первому уравнению прибавим второе, то y пропадет; если мы к первому уравнению прибавим третье, то y опять пропадет. Мы получим таким образом два новых уравнения, но только с двумя неизвестными:

(4) $3x + z = 17;$

(5) $2x + 4z = 18.$

Помножим первое уравнение на 4 и вычтем из него второе; тогда останется лишь одно уравнение для x, так как z исчезнет:

$$\begin{array}{r} 12x + 4z = 68 \\ 2x + 4z = 18 \\ \hline 10x \qquad = 50, \end{array}$$

откуда

$$x = 5.$$

Подставив эту величину в уравнение (4), получим:

$$3 \times 5 + z = 17,$$

откуда

$$z = 2.$$

Подставив теперь величины для x и для z, напр., в уравнение (1), получим:

$$5 + y + 4 = 13,$$

откуда

$$y = 4.$$

Итак, искомые решения системы совместных уравнений (1), (2) и (3) будут:

$$x = 5; \quad y = 4; \quad z = 2.$$

Это единственные значения для x, y, z, которые одновременно удовлетворяют всем трем уравнениям.

Эту же задачу можно решить и другими способами, основанными на простых законах преобразования уравнений (§ 21).

§ 36. Квадратные уравнения.

Если уравнение с одним неизвестным, напр., x, содержит это неизвестное в квадрате, то оно будет называться квадратным уравнением: при этом неизвестное может также входить в первой степени. Напр., уравнения:

$$x^2 = 9,$$

$$x^2 - x = 6$$

$$x^2 - 5x = -6,$$

являются квадратными уравнениями.

Эти квадратные уравнения могут быть написаны еще в следующей форме:

$$x^2-9=0;$$

$$x^2-x-6=0;$$

$$x^2-5x+6=0.$$

В самом общем случае, если мы обозначим через букву A коэффициент при x^2, через B коэффициент при x и через C постоянный член, мы можем изобразить всякое квадратное уравнение в виде:

$$Ax^2+Bx+C=0.$$

Так как мы можем разделить обе части уравнения на коэффициент при x^2, т.-е. на A (заметим, что правая часть, т.-е. 0, при этом останется нулем, так как на что бы ни делили 0, в результате всегда будет 0), то это уравнение может принять форму:

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0,$$

но его можно проще представить в следующей форме:

$$x^2+2bx+c=0,$$

при этом $$2b=\frac{B}{A}$$

и $$c=\frac{C}{A}$$

Пусть, напр., дано уравнение:

$$3x^2+18x+24=0.$$

В нем $$A=3,\ B=18 \text{ и } C=24,$$

следовательно $$2b=\frac{18}{3}=6, \text{ откуда } b=3$$

$$c=\frac{24}{3}=8.$$

Действительно, разделив коэффициенты и постоянный член за 3, мы получим:

$$x^2+6x+8=0,$$

или

$$x^2+(2\times 3)\,x+8=0.$$

Сравнив с

$$x^2+2bx+c=0,$$

видим, что

$$b=3 \text{ и } c=8.$$

Причина, почему мы приняли коэффициент при x за удвоенную величину другой величины b, будет скоро понятна; но если вы всегда привыкнете писать всякое квадратное уравнение в такой форме:

$$x^2+2bx+c=0,$$

то вам будет легко ответить на вопрос, чему равно b и чему равно c в любом квадратном уравнении. Вернемся напр., к нашим трем первым уравнениям:

(1) $x^2-9=0;$

(2) $x^2-x-6=0;$

(3) $x^2-5x+6=0.$

Мы видим, что:

(1) $b=0,\ c=-9;$

(2) $b=-\frac{1}{2},\ c=-6;$

(3) $b=-\frac{5}{2},\ c=+6.$

Зная b и c, можно найти те величины, которые удовлетворяют данному квадратному уравнению; их всегда две, и они называются корнями уравнения. Их обыкновенно обозначают:

$$x_1 \text{ и } x_2.$$

Эти корни уравнения $x^2+2bx+c=0$ будут:

$$x_1=-b+\sqrt{b^2-c};$$

$$x_2=-b-\sqrt{b^2-c}.$$

Проверим это сначала на наших примерах, а затем дадим объяснение, почему это так.

Для первого случая, когда $b = 0$, $c = -9$, мы имеем:

$$x_1 = 0 + \sqrt{0 - (-9)} = \sqrt{9} = 3;$$
$$x_2 = 0 - \sqrt{0 - (-9)} = -\sqrt{9} = -3.$$

Действительно, подставив x_1 в уравнение, получим:

$$x_1^2 - 9 = 0, \text{ так как } 3^2 = 9.$$

Подставив x_2, получим.

$$x_2^2 - 9 = 0, \text{ так как } (-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9.$$

Для второго случая, когда $b = -\frac{1}{2}$ и $c = -6$, имеем:

$$x_1 = -(-\tfrac{1}{2}) + \sqrt{(-\tfrac{1}{2})^2 - (-6)} = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + 6};$$
$$x_2 = -(-\tfrac{1}{2}) - \sqrt{(-\tfrac{1}{2})^2 - (-6)} = \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} + 6}.$$

Это дает:

$$x_1 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{25}{4}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2} = \tfrac{6}{2} = 3;$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{25}{4}} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} = -\tfrac{4}{2} = -2.$$

Итак $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$ являются корнями уравнения $x^2 - x - 6 = 0$, как это не трудно проверить.

Действительно, подставив $x_1 = 3$, получим:

$$3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0;$$

подставим $x_2 = -2$, получим:

$$(-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0.$$

Теперь решим те же уравнения по формулам для x_1 и x_2, которые выражаются в одной общей формуле:

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - c};$$

эту формулу надо твердо запомнить.

Уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ подобно уравнению: $x^2 + 2bx + c = 0$, при условии, что

$$b = -\tfrac{5}{2} = -2{,}5, \; c = 6,$$

поэтому

$$x = -(-2.5) \pm \sqrt{(-2,5)^2 - 6} = +2,5 \pm \sqrt{6,25 - 6} =$$
$$= 2,5 \pm \sqrt{0,25} = 2,5 \pm 0,5,$$

откуда $$x_1 = 2,5 + 0,5 = 3$$

и $$x_2 = 2,5 - 0,5 = 2.$$

Проверим, что корни $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$ удовлетворяют данному уравнению:

$$x^2 - 5x + 6 = 0;$$
$$3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0;$$
$$2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0.$$

Обратим внимание на то, что хорошею проверкою правильности решения квадратного уравнения является то, что произведение обоих корней всегда равно постоянному члену уравнения, т.-е.

$$x_1 \times x_2 = c$$

а сумма обоих корней равна коэффициенту при x, но с обратным знаком, т.-е.

$$x_1 + x_2 = -2b.$$

Для нашего уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, у которого, как мы видели, корни 3 и 2 мы имеем:

$$3 \times 2 = 6;$$
$$3 + 2 = 5.$$

Покажем, как решается квадратное уравнение без применения данной выше формулы, а затем, как эта формула выводится; но прежде всего покажем, чему равняется квадрат двучлена, т.-е., напр.,

$$(x + b)^2 = ?$$

Помножим по правилу умножения многочленов:

$$(x + b) \times (x + b).$$

Это даст нам $$x^2 + 2bx + b^2;$$

следовательно, $$(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2.$$

Словами это выражается так: квадрат двучлена равен квадрату первого члена плюс удвоенное произведение первого и второго члена плюс квадрат второго члена.

С другой стороны, если мы имеем выражение вида

$$x^2 + 2bx + b^2,$$

т.-е. такое выражение, у которого последний член является квадратом половины коэффициента при x, при чем, сверх того, у x^2 нет коэффициента или, что то же, этот коэффициент равен единице, то мы заранее знаем, что это выражение представляет собою квадрат двучлена $(x + b)$.

Так, напр., $x^2 + 6x + 9$ есть квадрат двучлена $x + 3$, так как

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2$$

С другой стороны, $x^2 - 6x - 7$ не есть квадрат какого-либо двучлена, так как последний член (-7) не есть квадрат половины коэффициента при x.

Заметим еще, что:

$$(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2.$$

Это выражение может быть написано в виде:

$$[x + (-b)]^2 = x^2 + 2(-b)x + (-b)^2,$$

т.-е. вполне подходит под общую формулу

$$(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2,$$

если мы будем под b подразумевать второй член с его знаком $+$ или $-$.

Полезно также знать, что если мы имеем выражение вида $x^2 - y^2$, т.-е. разность квадратов двух величин x и y, то такой двучлен может быть преобразован в произведение двух двучленов, а именно:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

Это легко поверяется умножением $(x + y)$ на $(x - y)$.

Таким образом, произведение суммы двух величин на разность этих двух величин есть разность квадратов этих величин.

Имея, напр., выражение вида (x^2-9) и зная, что 9 есть квадрат трех, мы можем написать:

$$x^2-9=(x+3)\ (x-3).$$

Оба только что высказанные соображения будут полезны нам при выводе формулы для решения квадратных уравнений.

Посмотрим, как поступить при решении квадратного уравнения без формул. Пусть, напр., требуется решить уравнение:

$$x^2+6x=7.$$

Посмотрев на левую часть, мы видим, что если мы прибавим 9, т.-е. квадрат половины коэффициента при x, то мы получим квадрат двучлена $x+3$,

так как $$(x+3)^2=x^2+6x+9.$$

Чтобы уравнение не нарушилось, прибавим 9 к обеим частям его, что даст:

$$x^2+6x+9=7+9,$$

следовательно $$(x+3)^2=16.$$

Извлечем квадратный корень из обеих частей уравнения:

$$\sqrt{(x+3)^2}=x+3;$$
$$\sqrt{16}\qquad=4.$$

Но заметим, что и (-4) является квадратным корнем из 16, так как: $(-4)\times(-4)=+16$ на основании правила знаков. Таким образом, вместо первоначального квадратного уравнения

$$x^2+6x=7$$

мы получили два уравнения первой степени:

$$x+3=\quad 4;$$
$$x+3=-4.$$

Из первого уравнения $x=\quad 1=x_1$;

из второго уравнения $x=-7=x_2$.

Величины x_1 и x_2 будут корнями данного квадратного уравнения, так как они оба удовлетворяют ему.

Действительно:

$$1^2 + 6 \times 1 = 7$$

и

$$(-7)^2 + 6 \times (-7) = 7.$$

Пользуясь изложенным приемом, мы можем решать квадратные уравнения без формул, но проще иметь готовую формулу.

Пусть квадратное уравнение будет приведено к формуле:

$$x^2 + 2bx + c = 0.$$

Эту формулу называют „канонической формой“ квадратного уравнения.

Заметим, что коэффициент при x считается за $2b$, при чем b будет половиной коэффициента при x.

Как b, так и c могут быть какими угодно числами, положительными, отрицательными или даже нулями.

Если мы обратим внимание на первые два члена $x^2 + 2bx$, то заметим, что не хватает члена b^2, чтобы мы имели квадрат двучлена $(x + b)$.

Прибавим, а затем отнимем от левой части уравнения величину b^2, что даст:

$$x^2 + 2bx + b^2 - b^2 + c = 0,$$

которое преобразуется в

$$(x + b)^2 - b^2 + c = 0,$$

или в

$$(x + b)^2 - (b^2 - c) = 0.$$

но

$$(\sqrt{b^2 - c})^2 = b^2 - c,$$

и мы можем написать наше уравнение в виде

$$(x + b)^2 - (\sqrt{b^2 - c})^2 = 0.$$

В левой части мы имеем разность квадратов двух выражений: $(x + b)$ и $\sqrt{b^2 - c}$; следовательно, она разлагается на два множителя, из которых один будет сумма обоих выражений, а второй — разность обоих выражений; это даст:

$$[(x + b) + \sqrt{b^2 - c}]\ [(x + b) - \sqrt{b^2 - c}] = 0$$

или

$$[x - (-b - \sqrt{b^2 - c})]\ [x - (-b + \sqrt{b^2 - c})] = 0.$$

Если мы положим:

$$x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}$$

и

$$x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c},$$

то будем иметь: $$(x - x_2)(x - x_1) = 0.$$

Вот в какое выражение преобразовалось наше квадратное уравнение:

$$x^2 + 2bx + c = 0.$$

Теперь докажем, что x_1 и x_2 будут корнями этого квадратного уравнения.

Подставим x_1 в тождество (т.-е. в равенство, которое сохраняется при всяком значении x):

$$x^2 + 2bx + c = (x - x_2)(x - x_1);$$

получим: $$x_1^2 + 2bx_1 + c = (x_1 - x_2)(x_1 - x_1).$$

Один из множителей $(x_1 - x_1)$ есть нуль; следовательно, и произведение есть нуль, а потому и тождественное выражение $x_1^2 + 2bx_1 + c$ есть тоже нуль; но

$$x_1^2 + 2bx_1 + c = 0$$

показывает, что x_1 есть корень уравнения

$$x^2 + 2bx + c = 0,$$

так как, по определению корня, это есть такое выражение, которое превращает уравнение в тождество.

Таким же образом мы докажем, что выражение x_2 есть другой корень квадратного уравнения.

Не трудно также доказать, что оба корня x_1 и x_2 отличаются тем свойством, что их сумма равна коэффициенту при x с обратным знаком, т.-е. $(-2b)$, а их произведение равно постоянному члену, т.-е. c.

Пример 1. Площадь места под постройкой равна 495 кв. метрам. В длину постройка на 3 метра больше, чем удвоенная ширина. Определить длину и ширину постройки.

Пусть x обозначает ширину постройки. Тогда $2x+3$ будет длина ее. Перемножив эти величины, мы получим площадь места под постройкой.

Следовательно: $$x\,(2x+3)=495$$

или $$2x^2+3x=495.$$

Перенеся постоянный член влево и деля все на коэффициент при x, получим:

$$x^2+1{,}5x-247{,}5=0.$$

Сравнивая это квадратное уравнение с канонической формулой

$$x^2+2bx+c=0,$$

видим. что $$b=0{,}75 \text{ и } c=-247{,}5.$$

По формуле для корней квадратного уравнения:

$$x=-b\pm\sqrt{b^2-c}$$

получим

$$x=-0{,}75+\sqrt{0{,}75^2+247{,}5}.$$

Здесь мы берем перед квадратным корнем знак + и не обращаем внимания на знак —, так как, очевидно, отрицательного решения задача не допускает.

Преобразовывая, найдем:

$$x=\sqrt{248{,}0625}-0{,}75=15{,}75-0{,}75=15.$$

Следовательно, ширина здания равна 15 метров, а длина его будет 33 метра. При этом площадь действительно получается равной 495 кв. метрам.

Пример 2. Металлическая табличка на машине имеет 60 кв. см. Длина ее на 4 см. больше ее ширины; определите длину и ширину пластинки.

Пусть x будет ширина пластинки; тогда длина ее будет: $x+4$. Это даст для площади: $x\,(x+4)$, а так как она равна 60 кв. см., то мы получим уравнение:

$$x\,(x+4)=60, \text{ или } x^2+4x=60.$$

Решим это квадратное уравнение без применения формул. Прибавив к обеим частям уравнения квадрат половины коэффициента при x, т.-е. $(2)^2$, мы получим:

$$x^2 + 4x + (2)^2 = 60 + (2)^2.$$

Левая часть есть полный квадрат двучлена $(x + 2)$; следовательно:

$$(x + 2)^2 = 64.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей, получим:

$$x + 2 = \sqrt{64} = 8,$$

следовательно:

$$x = 8 - 2 = 6.$$

Ширина пластинки равна 6 см., а длина ее будет 10 см.; площадь действительно получается равной 60 кв. см.

Как и в предыдущем примере, второе решение (отрицательное) должно быть откинуто по характеру задачи.

Задачи.

Определить неизвестные из следующих систем совместных уравнений:

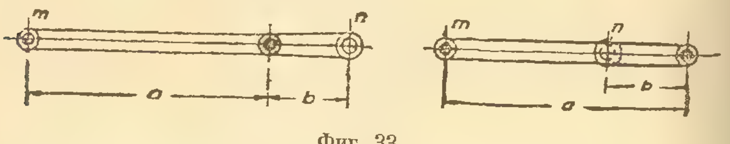
81 $x + y = 4$; $x - 2y = 1$.

82. $2x + y = 9$; $x - 4y = 0$.

83. $5x + 4y = 23$; $4x + 5y = 22$.

84. $x + y + z = 6$; $x - y + z = 2$; $x + y - z = 4$.

85. На фиг. 33 показаны два звена шарнирного механизма. В растянутом положении расстояние $(a + b)$ между центрами m



Фиг. 33.

и n равно 6 м. В укороченном положении расстояние $(a - b)$ между переместившимися центрами m и n равно 3 м. Определите длину звеньев a и b.

86. В литейной имеется кремнистое железо, содержащее в среднем 2% кремния и чугун с 5,2% кремния. Желательно соста-

вить смесь с 3,25% кремния. Подсчитайте, сколько железа и сколько чугуна пойдет на 100 килограммов смеси.

87. Расстояние между осями двух параллельных валов равно 182 мм. На эти валы желают надеть пару шестерен, сцепленных друг с другом. Определить диаметры этих шестерен, если требуется иметь отношение между числами оборотов валов, как 1,8 к 1.

88. Сумма двух чисел равна 20, а их произведение 75. Определить эти числа.

89. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 метрам, а разница в длине катетов 7 метров. Определить оба катета.

Фиг. 34.

90. На фиг. 34 показаны три дыры *A*, *B* и *C*. Между *A* и *C* 25 см. Угол у *B* прямой. Расстояние от *B* до *C* на 5 см. больше, чем от *A* до *B*. Определить расстояния *AB* и *BC*.

ГЛАВА VIII.

Таблицы и графики.

§ 37. Пользование таблицами.

Если две величины зависят друг от друга таким образом, что изменение одной вызывает соответствующее изменение другой, то эта зависимость может быть выражена уравнением. Напр., уравнение $y = 2x + 3$ показывает, что для всякой величины x соответствующее значение y будет вдвое больше плюс постоянная величина 3.

Так:

для $x = 0$; $y = 2 \times 0 + 3$, т.-е. 3;
для $x = 1$; $y = 2 \times 1 + 3$, т.-е. 5;
для $x = 3$; $y = 2 \times 3 + 3$, т.-е. 9 и т. д.

Зная уравнение, связывающее переменные величины x и y, возможно вычислить для каждого значения одной соответствующее значение другой. Обыкновенно одну из переменных, а именно x, считают **независимой переменной** (ее еще называют **аргументом**), а другую y—**зависимой** или **функцией**.

Независимой переменной x дают ряд значений и вычисляют соответствующие значения другой переменной y, которая поэтому и называется **зависимой**.

Говорят также, что y есть функция x; здесь слово функция заменяет слово зависимость.

Но, в свою очередь, y может быть сделано независимой переменной (или аргументом). тогда x превратится в зависимую переменную (или функцию).

Так вместо уравнения $y = 2x + 3$ мы можем написать преобразованное уравнение $x = \frac{1}{2}(y - 3)$ и, давая y произвольные значения, вычислять соответствующие x.

Так:

для $y=0$, $x=\frac{1}{2}(0-3)$, т.-е. $-1\frac{1}{2}$;

для $y=1$; $x=\frac{1}{2}(1-3)$, т.-е. -1;

для $y=9$; $x=\frac{1}{2}(9-3)$, т.-е. 3 и т. д.

Если уравнением приходится пользоваться часто, то полезно наперед вычислить значения функции для различных значений аргумента и составить таблицу.

Такие таблицы даны в различных справочниках для всевозможных целей. Возьмем, напр., табличку для болтов и гаек так называемых **нормальных размеров**, принятых в Соединенных Штатах.

D	N	d	w	W	h	H
Диаметр болта.	Число витков в дюйме.	Диаметр у основания нарезки.	Ширина площадки у нарезки.	Ширина головки болта и гайки.	Высота головки болта.	Высота гайки.
$\frac{1}{4}$	20	0,185	0,0062	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{5}{16}$	18	0,240	0,0070	$\frac{19}{32}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{5}{16}$
$\frac{3}{8}$	16	0,294	0,0078	$\frac{11}{16}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{7}{16}$	14	0,341	0,0089	$\frac{25}{32}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{7}{16}$
$\frac{1}{2}$	13	0,400	0,0096	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{9}{16}$	12	0,454	0,0104	$\frac{31}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{9}{16}$
$\frac{5}{8}$	11	0,507	0,0113	$1\frac{1}{16}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{3}{4}$	10	0,620	0,0125	$1\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{7}{8}$	9	0,731	0,0140	$1\frac{7}{16}$	$\frac{22}{32}$	$\frac{7}{8}$
1	8	0,837	0,0156	$1\frac{5}{8}$	$\frac{12}{16}$	1

Таблицы эти были вычислены на основании следующих формул:

$$N=\frac{1}{0{,}24\sqrt{D+0{,}625}-0{,}175}$$ (ближайшее целое число)

$$d=D-\frac{1{,}299}{N};$$

$$w = \frac{1}{8N}; \qquad h = \tfrac{3}{4} D + \tfrac{1}{16}$$

$$W = 1\tfrac{1}{2} D + \tfrac{1}{8}; \qquad H = D.$$

Очень часто, чтобы сберечь время впоследствии, уравнения или формулы выражаются, подобно выше приведенным, в табличной форме. Токарные станки, напр., обыкновенно снабжены досками с нанесенными на них таблицами для определения наборов шестерен, требуемых для нарезки винтов с различным шагом. При делительных головках фрезерных станков обыкновенно имеются таблицы для быстрого пользования ими. Часто имеются таблицы для скоростей резания или шлифовки различных материалов и т. д. Вообще, применению таблиц нет конца.

§ 38. Пользование графиками.

Формулы или результаты наблюдений могут быть выражены не только таблицами, но и в виде кривых. Кривые эти обыкновенно строятся на особой клетчатой бумаге. Для большинства случаев величины делений клетчатой бумаги одинаковы. Вдоль одного края бумаги откладываются в известном масштабе значения одного переменного, а вдоль другого края в другом подходящем масштабе значения другого переменного.

Горизонтальные длины носят название **абсцисс** (их обыкновенно обозначают буквой x), а вертикальные длины носят название **ординат** (они обозначаются буквою y). Вместе абсциссы и ординаты называются **координатами**, а края бумаги или другие параллельные им линии, вдоль которых наносятся абсциссы и ординаты, называются **осями координат**. Оси координат Ox и Oy, называемые часто **ось x-ов** и **ось y-ов**, пересекаются в точке, называемой **началом координат**.

Отложим по оси Ox некоторое определенное значение первой переменной и проведем через конец отрезка **вертикальную**[1]) линию; затем отложим по оси Oy соответствующее значение другой переменной и проведем **горизонтальную** линию через полученную точку. Обе линии пересекутся в какой-нибудь точке, и мы скажем, что эта точка имеет координатами данные значения переменных (x, y).

[1]) В данном случае имеется в виду чертеж, расположенный в вертикальной плоскости, напр., на стене или классной доске.

Если мы проделаем подобное нанесение точек для целого ряда значений обеих переменных и соединим полученные точки сплошною кривой, то мы получим графическое изображение данного уравнения или данного ряда наблюдений или, что то же, **графическое изображение,** или график функции некоторой переменной, или диаграмму сделанных наблюдений.

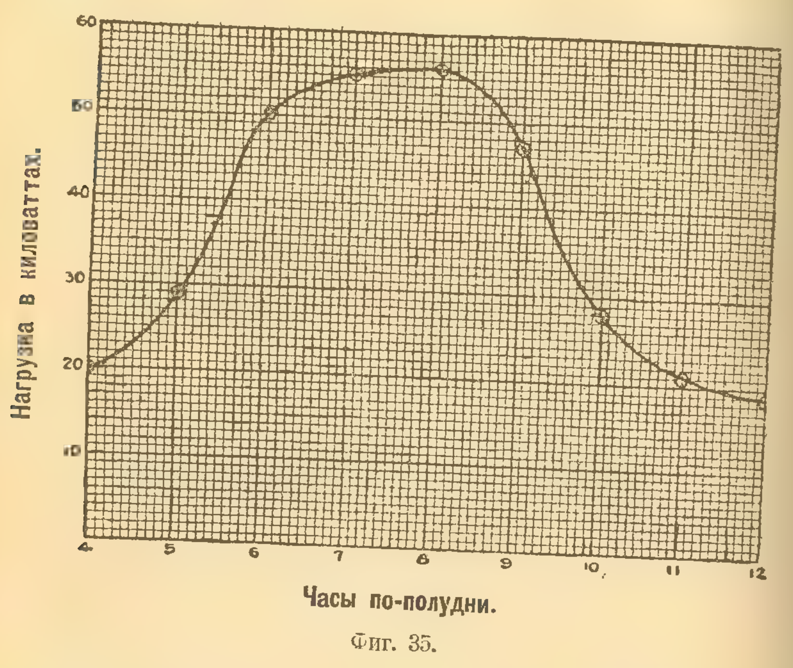
Предположим, что на небольшой электрической осветительной станции составили следующую таблицу для нагрузки динамо-машины между 4 час. пополудни и 12 час. ночи.

Часы пополудни.	Нагрузка киловатт.
4	20
5	29
6	50
7	55
8	56
9	47
10	28
11	21
12	19

На фиг. 35 показано графическое изображение этой таблицы в виде кривой. Эта **кривая нагрузки** построена следующим образом. Нижний край листа (ось x-ов) служит для времени. Каждое большое делени представляет собою истекший час времени (начинают с 4 час.). Т. к. такое большое деление содержит 10 малых делений, то каждое малое деление по горизонтальной оси представляет собою $\frac{1}{10}$ часа, т.-е. 6 минут. Левый край листа (ось y-ов) служит для нагрузки. Каждое большое деление представляет собою 10 киловатт (начинают с 0 килов.), а поэтому каждое малое деление по вертикальной оси представляет собою 1 киловатт.

Первая точка кривой будет на оси y-ов (соответствующей 4 час.) на расстоянии 20 малых (или 2 больших) делений. Вторая точка кривой будет на вертикали, проходящей через 5 час. и на горизонтали, проходящей через 29 киловатт. Третья точка имеет координатами 6 час. и 50 киловатт и т. д.

Все нанесенные точки кривой нагрузки обведены для ясности кружками; эти точки соединяются плавной кривой, дающей наглядное представление об изменении нагрузки динамомашины в зависимости от времени.

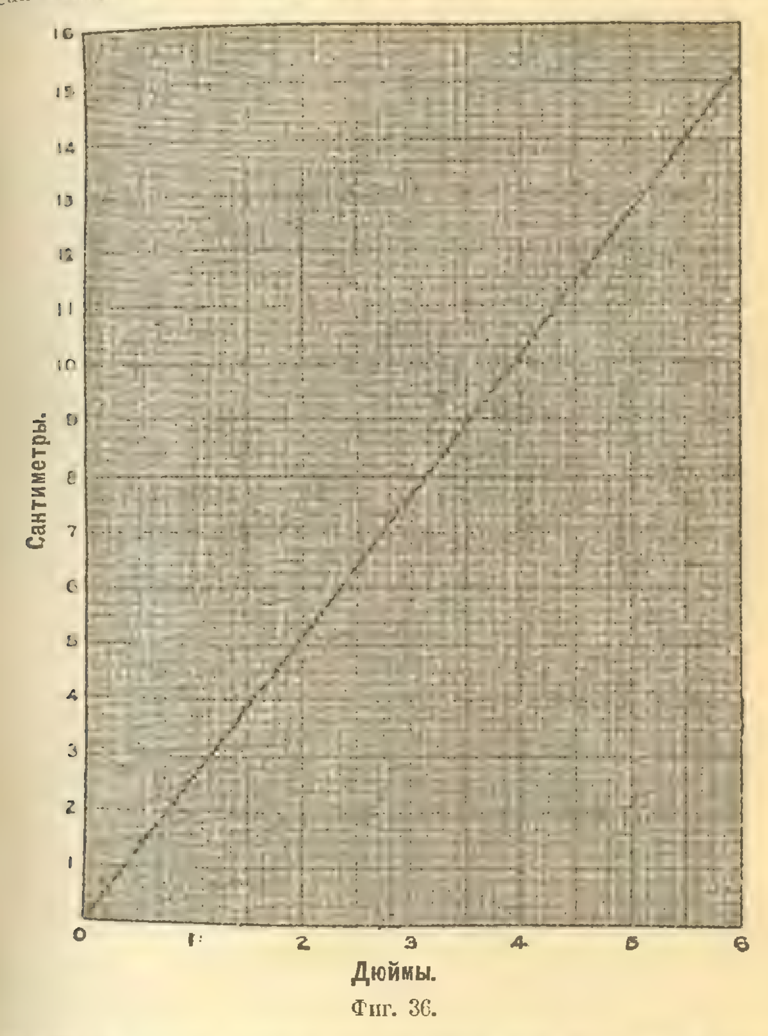


Фиг. 35.

Кривая дает возможность определить все промежуточные значения нагрузки, не имеющиеся в таблице. Напр., в 4 ч. 30 м. нагрузка была 23 киловатта; в 5 ч. 30 мин. она была 38 киловатт и т. д. Возможно также по кривой определить, в какое время была такая-то данная нагрузка. Напр., 40 киловатт было немного после 5 ч. 30 мин., а также в 9 час. 18 мин. До 6 часов потребление электричества для освещения росло быстро, затем между 6 и 8 оно медленно повышалось до своего максимума, т.-е. наибольшей величины, после чего стало падать. В 10 час. веч. оно было почти такое же, как и в 5 час. дня. Характер этой кривой главным образом зависит от времени года; так летом электричества для освещения придется употреблять меньше, а зимою значительно больше, вообще же, кривая гораздо яснее и нагляднее таблицы обрисовывает данное явление или данный результат вычисления; конечно, таблицы могут быть построены с гораздо большей точ-

ностью, чем кривые, но зато промежуточные величины скорее получаются посредством кривой, чем посредством вычисления.

На фиг. 36 показана наглядно зависимость между дюймами и сантиметрами. Тут график в действительности — прямая линия;



Фиг. 36.

на прямую линию приходится смотреть, как на частный случай кривых, и мы, в данном случае, говорим о построении кривой, выражающей зависимость между дюймами и сантиметрами; об этой зависимости говорят, однако, что она — прямолинейная.

Дюймы отложены (в произвольном масштабе) по горизонтальной оси (или оси x-ов), а сантиметры отложены (в другом произвольном масштабе) по вертикальной оси (или оси y-ов). Соответствующие точки кривой получают из следующих соображений:

0 дм. = 0 см., 1 дм. = 2,54 см., 1 см. = 0,3937 дм.

Напр., 5 дм. = 5 × 2,54 = 12,7 см. (это легко видеть на кривой); также 10 см. = 3,937 дм.: это также более или менее указывается кривой. Конечно, от кривой, построенной в сравнительно небольшом масштабе, ожидать особой точности нельзя.

Приведем теперь пример построения кривой, выражающей результаты опытных наблюдений, т.-е. основанных на данных опыта, а не вычисления. Пусть имеется спиральная пружина, сделанная из проволоки диаметром в 10 мм.; наружный диаметр пружины 50 мм., число витков 10. Нагрузку производим в пределах от 20 кгр. до 180 кгр. через 20 кгр. Сжатие, по сравнению с ненагруженной пружиной дало следующую табличку:

Нагрузка в килограмм.	Сжатие в миллиметр.
20	1,70
40	3,57
60	4,92
80	6,90
100	8,31
120	9,80
140	11,68
160	13,32
180	15,20

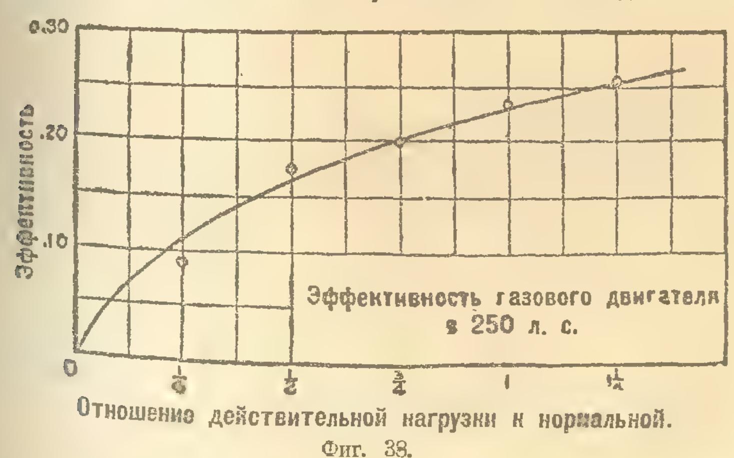
Нагрузки мы откладываем в подходящем масштабе (фиг. 37) по горизонтальной оси, а сжатия в другом масштабе по вертикальной оси. Затем мы отмечаем кружками соответствующие точки кривой и проводим кривую. Заметим, что кривая не проходит совершенно точно через все нанесенные точки, т. к. в каждом из наблюдений допустимы небольшие погрешности, и поэтому кривую проводим плавной, а не зигзагообразной. В данном случае зависимость между сжатием и нагрузкой прямолинейная.

Сжатие в миллиметрах.

Нагрузка в килограммах.

Фиг. 37.

На фиг. 38 показана кривая полезного действия двигателя внутреннего горения. Опыты производились над двигателем в



Фиг. 38.

250 лошадиных сил, работавшим при различных нагрузках, начиная с $\frac{1}{4}$ нормальной нагрузки, т.-е. с 62,5 л. с. и до $1^1/_4$ этой нагрузки, т.-е. 312,5 л. с. Вдоль горизонтальной оси откладывались отношения действительной нагрузки к нормальной нагрузке; единица соответствует, следовательно, 250 лош. сил. Вдоль вертикальной оси откладывался коэффициент полезного действия двигателя, полученный на основании опыта и подсчета. Кривая в этом случае также не проходит через все точки, т. к., по характеру измерений и подсчетов, допустимы отступления и неточности.

Задачи.

91. Определите по кривой, изображенной на фиг. 35, нагрузку динамомашины в следующие часы: 4 ч. 30 мин., 7 ч. 30 мин., 9 ч. 30 мин. и 10 ч. 15 мин.

92. В какое время нагрузка динамомашины (фиг. 35) была равна 35 киловатт?

93. Определите, пользуясь диаграммой на фиг. 36, сколько сантиметров составляют 6 дюймов. Проверьте ваш результат вычислением.

94. Диаграмма на фиг. 37 дает сжатие определенной пружины при различных нагрузках. Иногда для определения этого сжатия пользуются следующей формулой:

$$F = \frac{NW(D-d)^3}{760\ d^4}.$$

F есть сжатие в миллиметрах; N — число витков; W — нагрузка в килограммах; D — наружный диаметр спиральной пружины; d — диаметр проволоки.

В пружине, послужившей для диаграммы на фиг. 37, $N = 10$, $D = 50$ и $d = 10$. Подставьте эти величины в формулу и вычислите по ней сжатие F для нагрузки W в 200 кгр. Сравните полученную вами величину с той, которую дает диаграмма.

95. В одном американском каталоге стоят следующие цены в долларах (один долл. приблизительно равен 2 золотым рублям) для изготовляемых фирмой двигателей внутреннего горения: $1^1/_2$ л. с. — 40 долл.; $2^1/_2$ л. с. — 60 долл.; 4 л. с. — 100 долл.; 5 л. с. — 120 долл.; $7^1/_2$ л. с. — 175 долл.; 10 л. с. — 225 долл.; 15 л. с. — 350 долл

Постройте кривую для стоимости двигателей в зависимости от их мощности в лош. сил. Откладывайте мощности по горизонтальной оси, а цены по вертикальной, выбрав подходящие масштабы.

96. Из построенной в предыдущем примере кривой определите стоимость двигателя в 6 л. с. и двигателя в 12 л. с. Продолжите кривую немного вправо и определите стоимость двигателя в 20 л. с.

97. Формула, дающая давление P в кгр. на кв. см. столба воды высотою H метров, следующая:

$$P = 0{,}1\ H.$$

Постройте диаграмму давлений для напоров до 30 метров. Возьмите горизонтальную ось для напоров и вертикальную для давлений.

98. Составьте таблицу, дающую число оборотов в минуту, которое должен делать предмет, обтачиваемый на токарном станке, в зависимости от скорости резания и от диаметра предмета. Заголовок для таблицы нижеследующий:

Диаметр предмета в миллиметрах.	Число оборотов в минуту для различных скоростей резания:				
	6 метр. в мин.	12 метр. в мин.	18 метр. в мин.	24 метр. в мин.	30 метр. в мин.

Диаметры D должны изменяться от 25 до 300 мм. через 25 мм

Помните, что скорость резания V есть произведение числа оборотов предмета в минуту N на его окружность, выраженную в метрах. Выведите формулу, дающую число оборотов в зависимости от скорости и от диаметра. Затем возьмите $D = 25$ мм., $V = 6$ метрам в мин. и определите соответствующее число оборотов N. Потом для того же D, но для разных V, подсчитайте различные N и проставьте эти числа в первой горизонтальной строке таблицы. Потом возьмите $D = 50$ мм., $V = 6$ метрам, 12 метрам и т. д.; далее $D = 75$ мм., $V = 6$ м., $V = 12$ метрам и т. д. и наконец последнее число, которое вы впишите в нижнем правом углу таблицы, будет N для $D = 300$ мм., $V = 30$ метрам в минуту.

ГЛАВА IX.

Уравнения кривых линий.

§ 39. Кривые линии и их уравнения

Мы видели, что всякая формула (или уравнение) может быть графически изображена посредством кривой. Уравнение, соответствующее кривой, называется **уравнением этой кривой**. Раз уравнение дано, то кривая вполне определена; остается лишь выбрать подходящие масштабы для абсцисс и ординат, при чем от выбора масштабов зависит точность, с которой можно будет производить отсчеты; поэтому масштабы всегда выбираются по возможности крупные. Обратным образом, если кривая начерчена, то иногда возможно вывести то уравнение, которое представляет кривую; это далеко не всегда возможно и иногда бывает довольно затруднительно, во всяком же случае требует значительного навыка и умения, кроме простейших случаев, когда вместо кривой имеем прямую линию. Как мы увидим дальше, в этом случае соответствующее уравнение есть всегда уравнение первой степени; точно так же, если нам требуется изобразить в виде кривой уравнение первой степени, то мы всегда получим прямую линию.

Напр., зависимость между дюймами и сантиметрами есть уравнение первой степени, т. к. мы знаем, что если в известной длине имеется x дюймов, то соответствующее число сантиметров будет в 2,54 раза больше; называя это число через y, мы будем иметь:

$$y = 2{,}54\ x$$

Это уравнение изображено графически на фиг. 36 в предыдущей главе, и мы видим, что мы имеем тут дело с прямой линией.

При решении задачи 97, в предыдущей главе, в которой требуется изобразить графически связь между давлением и высотою водяного столба, а именно:

$$P = 0{,}1\ H,$$

мы также получим прямую линию и т. д.

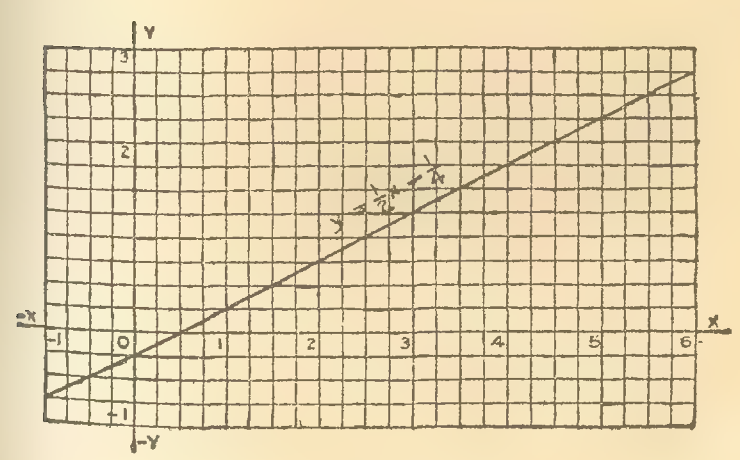
§ 40. Положительные и отрицательные координаты.

Обыкновенно координаты точек кривой принято изображать буквами x и y, хотя это не обязательно.

По горизонтальной оси откладываются абсциссы x, а по вертикальной—ординаты y. До сих пор нам приходилось откладывать x вправо от начала координат, т.-е. от точки пересечения осей Ox и Oy, а y—вверх; эти направления условились считать положительными и обозначать знаком плюс (+). Но может случиться, что x придется влево от начала координат; тогда мы будем считать его отрицательным и обозначим знаком минус (—); точно так же, если y придется вниз от начала координат, то будет отрицательным.

Пусть, напр., дано уравнение:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$



Фиг. 39.

Дадим x ряд значений, напр.,

$$0, 1, 2, 3, 4,$$

это даст нам для y соответственно:

$$-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}.$$

Нанеся соответствующие значения для x и для y, по принятому правилу для знаков, мы получим прямую линию, изображенную на фиг. 39

Возьмем другое уравнение первой степени:

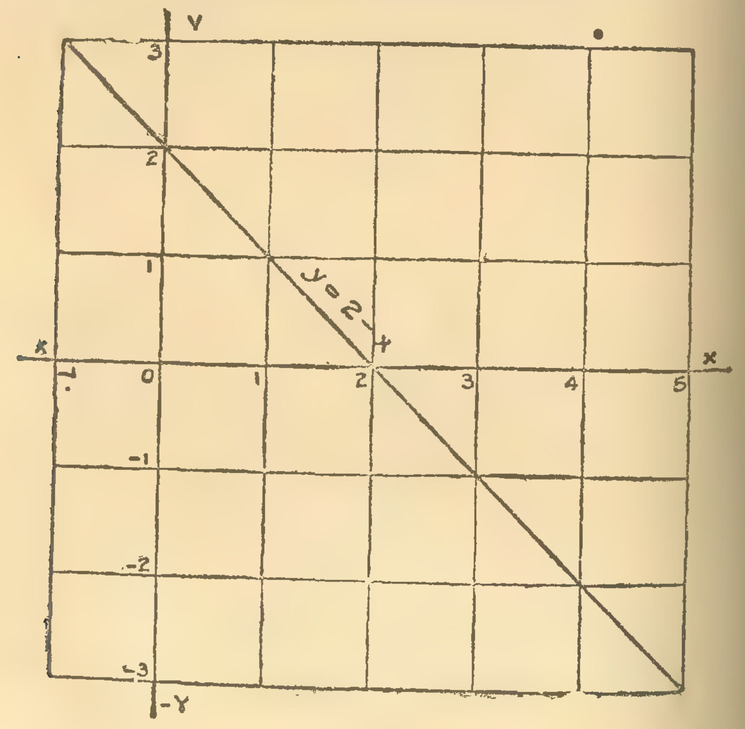
$$y = 2 - x.$$

Для x, равного соответственно

$$0, 1, 2, 3, 4;$$

y будет: $2, 1, 0, -1, -2.$

Мы получим прямую линию, изображенную на фиг. 40.



Фиг. 40.

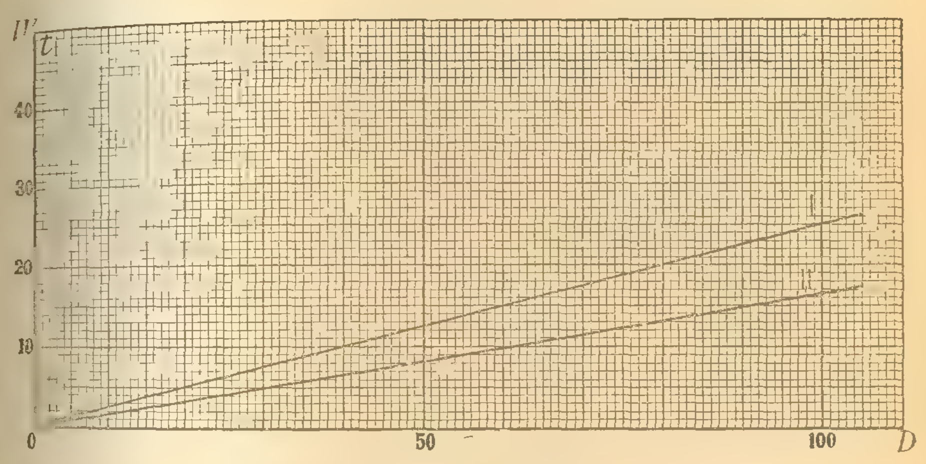
§ 41. Уравнение прямой линии

На фиг. 41 показаны две прямые, а именно: одна более крутая с уравнением:

$$w = \frac{1}{4} D,$$

и вторая — более пологая, отвечающая уравнению

$$t = \frac{1}{6} D.$$



Диаметр вала в сантиметрах.

Фиг. 41.

Здесь в обоих случаях мы за абсциссы считаем D (вместо x), а за ординаты, в первом случае w, а во втором t.

Сущность дела, разумеется, от этого нисколько не меняется.

Эти уравнения дают размеры шпонок для валов с диаметром D, при чем:

толщина шпонки $= t$ (шестая часть диаметра),

ширина $= w$ (четвертая часть диаметра)

Табличка для значений w и t при различных D приведена ниже и составляется очень просто:

$D =$	0	2	4	6	8	10	12
$w =$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$t =$	0	0,33	0,67	1	1,33	1,67	2

Обратим внимание на то, что оба уравнения прямых очень похожи друг на друга; вся разница заключается лишь в величине коэффициента при D; там, где этот коэффициент больше ($^1/_4$) прямая круче, или ее подъем больше: одно деление на четыре; в случае меньшего коэффициента ($^1/_6$) — прямая положе, или ее подъем меньше, составляя одно деление на шесть. Этот коэффициент при абсциссе, в том случае, когда коэффициент при координате отсутствует, или, точнее, равен 1, называется „угловым коэффициентом" прямой, т.-е. множителем, от которого зависит угол подъема прямой.

Для прямой в фиг. 39 угловой коэффициент $\frac{1}{2}$, и ее подъем одно деление на два деления, а в фиг. 40 — угловой коэффициент (-1), и подъем не вправо, а влево, так как стоит знак минус.

Обратим теперь внимание на постоянное число во второй части уравнений или на **постоянный** член в них:

(1)	$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$	(фиг. 39);
(2)	$y=2-x$	(фиг. 40);
(3)	$w=\frac{1}{4}D$	(фиг. 41);
(4)	$t=\frac{1}{6}D$	(фиг. 41).

В первом случае этот постоянный член отрицательный ($-\frac{1}{4}$), и прямая пересекает вертикальную ось (или y-ов) под началом координат на расстоянии этого постоянного члена (фиг. 39). Во втором случае постоянный член положительный, он равен 2, и прямая пересекает Oy вверху, на расстоянии постоянного члена (фиг. 40).

В двух последних уравнениях (3 и 4) постоянного члена нет, т.-е. он равен нулю, и прямые проходят через начало координат (фиг. 41).

Эти рассуждения приводят нас к общему виду уравнения прямой:

$$y=ax+b.$$

В этом уравнении коэффициент при x представляет собою угловой коэффициент (подъем „a" на единицу), а b, постоянный член, укажет, насколько ниже или выше начала координат ле-

жит точка пересечения прямой с вертикальною осью; если $b=0$, то прямая проходит через начало координат.

Во всех случаях, когда мы имеем уравнение первой степени напр.,

$$y=ax+b,$$

достаточно вычислить координаты двух точек прямой и провести через них прямую; все остальные точки обязательно попадут на нее.

Заметим, что координаты одной точки нам известны, а именно: $x=0$, $y=b$; для построения прямой достаточно найти координаты какой-либо другой точки. Часто бывает удобным определить ту точку, где прямая пересекает горизонтальную ось.

Всякая точка на горизонтальной оси имеет $y=0$; следовательно, если эта точка кроме того лежит на данной прямой, то x должен быть таков, что уравнение

$$0=ax+b$$

будет удовлетворено, а это даст:

$$x=-\frac{b}{a}.$$

Напр., $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ (фиг. 39),

даст $0=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

следовательно, $x=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times 2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

Итак, мы будем иметь.

$$y=0, \qquad x=\frac{1}{2}.$$

Кроме того, нам известно:

$$y=-\frac{1}{4}, \qquad x=0.$$

Эти две точки вполне определяют прямую.

Для уравнения (фиг. 40):

$$y=2-x,$$
$$0=2-x,$$
$$x=2.$$

Обе точки будут:

(1) $y=0, \quad x=2;$

(2) $y=2, \quad x=0.$

Если постоянный член отсутствует, то прямая проходит через начало координат; одна точка поэтому известна, и остается определить другую любую точку, а затем провести прямую через нее и начало координат.

Так, напр. (фиг. 41):

$$w=\frac{1}{4}D.$$

Возьмем $D=4$, тогда $w=1$, а так как ввиду отсутствия постоянного члена прямая проходит через начало координат, то прямая проводится через эти две точки.

Точно так же (фиг. 41) для

$$t=\frac{1}{6}D,$$

обе точки, определяющие прямую, будут:

(1) $t=0, \quad D=0;$

(2) $t=1, \quad D=6.$

§ 42. Нахождение уравнения прямой.

Если мы имеем прямую линию, отнесенную к двум прямоугольным осям координат (Ox и Oy), то нетрудно определить уравнение этой прямой. Действительно, мы знаем, что это уравнение должно иметь вид:

$$y=ax+b.$$

Здесь a и b неизвестны, но мы можем из диаграммы определить координаты любых двух точек этой прямой, напр.,

$$x_1, \ y_1 \text{ и } x_2, \ y_2.$$

Так как эти точки лежат на прямой, то они должны удовлетворять уравнению этой прямой, что даст:

(1) $y_1=ax_1+b;$

(2) $y_2=ax_2+b.$

Из этих двух совместных уравнений можно вычислить неизвестные коэффициенты a и b.

Вычтем, напр., (1) из (2); это даст

(3) $$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Следовательно: $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставив теперь это выражение в (1), получим:

(4) $$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + b.$$

Помножим обе части (4) на $(x_2 - x_1)$,

получим $$y_1 x_2 - y_1 x_1 = y_2 x_1 - y_1 x_1 + b x_2 - b x_1,$$

или $$y_1 x_2 - y_2 x_1 = b x_2 - b x_1,$$

откуда $$b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Следовательно, основное уравнение, которое имели выше:

$$y = ax + b,$$

примет вид:

(5) $$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Это уравнение показывает, что прямая имеет угловой коэффициент:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

и что она пересекает Oy в точке:

$$x = 0, \qquad y = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Можно подсчитать, где эта прямая пересекает Ox; для этого надо лишь сделать в (5) $y = 0$ и определить соответствующее x:

$$0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Помножив на $(x_2 - x_1)$ и перенеся известный член влево, получим:

$$-(y_1x_2 - y_2x_1) = (y_2 - y_1)\,x,$$

откуда
$$x = -\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{y_2 - y},$$

при
$$y = 0$$

Для простоты решения удобнее выбрать обе точки с наиболее простыми координатами, можно взять, напр., те точки, где прямая пересекает оси координат, если только эти точки определимы по диаграмме или, если они не слишком близки, так как иначе небольшая неточность сильно отразится на уравнении.

Пусть, напр., прямая, уравнение которой ищут, пересекает Ox в точке

$$x = x_1, \qquad y = 0,$$

и она же пересекает Oy в точке.

$$x = 0, \qquad y = y_2.$$

Тогда общее уравнение всякой прямой

$$y = ax + b$$

даст следующие два уравнения для определения a и b:

(1′) $$0 = ax_1 + b$$

(2′) и $$y_2 = b,$$

(3′) следовательно, $$0 = ax_1 + y_2,$$

(4′) поэтому $$a = -\frac{y_2}{x_1},$$

(5′) что даст окончательно $$y = -\frac{y_2}{x_1}\,x + y$$

Сравним теперь уравнение (5′) с ранее полученным уравнением (5), в котором мы положим $y_1 = 0$ и $x_2 = 0$; мы видим, что (5) превращается в (5′), как и надо было ожидать.

Иногда случается, что, когда нанесут на клетчатую бумагу результаты целого ряда опытов, все точки располагаются почти по прямой линии. Тогда вычерчивают такую прямую, которая лучше всего может охватить всю совокупность опытных данных, т. е. которая лежит по возможности посреди нанесенных точек, не

слишком отклоняясь от них в сторону, и ищут уравнение этой прямой. Полученное уравнение будет выражать в виде формулы результаты опытов и получает название эмпирической (или опытной) формулы. Обыкновенно эмпирические формулы имеют лишь ограниченную точность, достаточную, впрочем, для практики; кроме того, необходимо знать, в каких пределах пользование ими допустимо; несоблюдение этой предосторожности иногда может повести к значительным ошибкам.

Допустим, что при испытании на разрыв целого ряда стержней из углеродистой стали с различным процентным содержанием углерода мы получили следующие результаты:

% углерода в стали.	Разрывающее усилие в кгр. на кв. мм.
0,09	37
0,16	45
0,20	46
0,31	54
0,39	63
0,50	68
0,57	77
0,71	87
0,79	89
0,89	98

Нанеся эти значения на клетчатую бумагу (фиг. 42), мы получим ряд точек, расположенных почти по прямой линии.

Проведя срединную линию, мы заметим, что она приблизительно проходит через следующие две точки:

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 32;$$
$$x_2 = 0,9, \qquad y_2 = 100.$$

Искомое уравнение

$$y = ax + b$$

даст.

(1) $$32 = b,$$

(2) $$100 = 0,9a + b,$$

следовательно, $100 = 0{,}9a + 32,$

поэтому $0{,}9a = 100 - 32,$

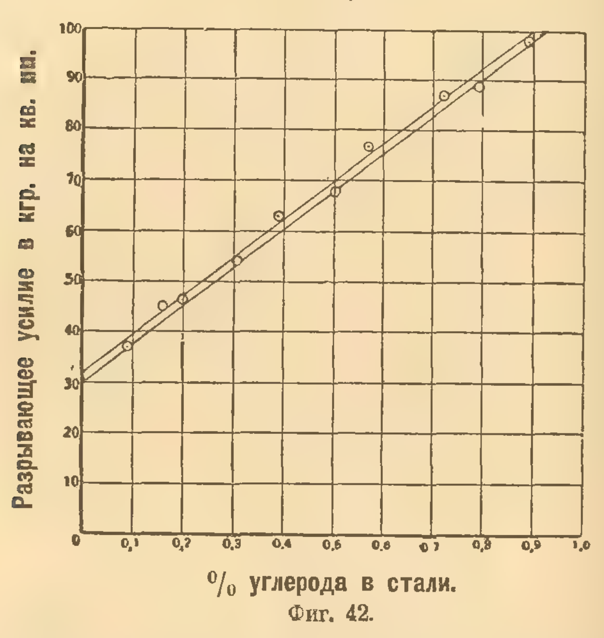
или $a = \frac{68}{0{,}9} = 7\ ,$

следовательно, $y = 76x + 32.$

Называя разрывающее усилие через S, а процентное содержание углерода через C, мы будем иметь:



$$S = 76C + 32.$$



Фиг. 42.

На чертеже (фиг. 42) приведена для сравнения еще другая прямая, тоже довольно удовлетворительно изображающая эмпирическую зависимость между S и C, а именно:

$$S = 30 + 75\,C.$$

Эта прямая расположена ниже первой.

Если мы пожелаем, то можем определить уравнение прямой на основании одной лишь таблицы, беря, напр., данные для первой и последней пробы, а именно:

$$x_1 = 0{,}09, \qquad y_1 = 37;$$

$$x_2 = 0{,}89, \qquad y_2 = 98.$$

Тогда вычисления получатся несколько сложнее, и окончательное уравнение будет отличаться несколько от того приближенного уравнения, которое мы получили выше, но для практических целей оно не будет лучше первого.

В виде упражнения, решите ту систему уравнений, которая при этом получится, а именно:

(1) $$37 = 0{,}09\,a + b,$$

(2) $$98 = 0{,}89\,a + b$$

и проверьте, что a и b, которые таким образом получите, могут быть также вычислены из формул для a и b, выведенных ранее на основании общего решения задачи, которые дают:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Если мы вместо двух крайних точек возьмем две другие точки, то результаты получатся иные, так как, вообще говоря, точки лишь приближенно лежат на одной прямой, что видно на фиг. 42. При решении подобных задач нельзя брать точек, близко расположенных друг к другу, так как иначе случайные погрешности в опытных данных дадут громадные отклонения в направлении прямой, т.-е. в угловом коэффициенте, а также в постоянном члене. Если перед решением задачи вычислением сделать графическое построение, подобное тому, как сделано на фиг. 42, то, конечно, всякие случайные ошибки будут сразу заметны.

§ 43. Уравнения кривых.

Если имеется уравнение, в котором одна или обе переменные входят в какой-нибудь степени, отличающейся от единицы, или хотя один из членов уравнения содержит произведение обеих переменных, или, вообще, если уравнение не есть уравнение первой степени, то тогда графическое изображение уравнения будет кривая, но не прямая линия. Обыкновенно такая кривая строится по точкам, координаты которых вычисляются на осно-

вании данного уравнения. Для примера приведем кривую, изображенную на фиг. 43; она соответствует уравнению:

$$y^2 = 1,5x.$$

или же $$y = \sqrt{1,5x}.$$

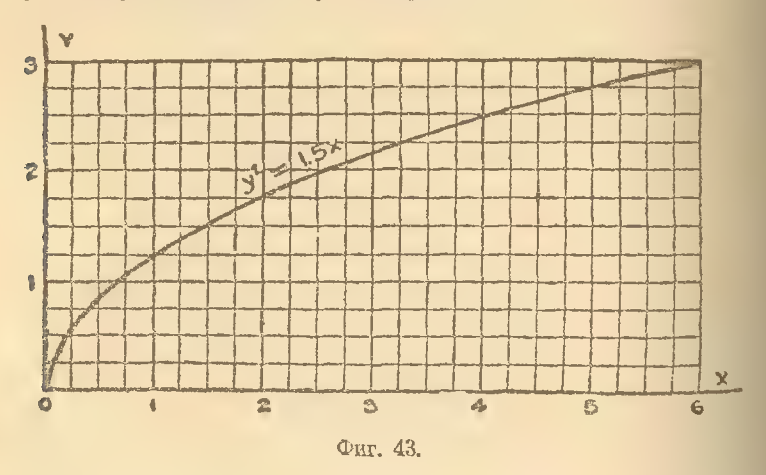
Дадим x ряд значений, напр., 0; 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 6 и определим соответствующие y:

$\sqrt{0}$; $\sqrt{1,5 \times 0,5}$; $\sqrt{1,5 \times 1}$; $\sqrt{1,5 \times 2}$ и т. д. до $\sqrt{1,5 \times 6}$.

Мы получим тогда следующую табличку:

$x=$	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$y=$	0	0,87	1,23	1,73	2,12	2,45	2,74	3

Эти значения для x и y, нанесенные на клетчатую бумагу, дадут кривую, изображенную на фиг. 43.



Фиг. 43.

Не надо забывать, однако, что значение y было получено после извлечения квадратного корня; мы знаем, что квадратные корни допускают не только положительные, но и отрицательные ответы, так как произведение двух отрицательных величин дает положительную величину. Поэтому, кроме выше приведенных

значений для y, мы будем иметь для тех же x еще следующие величины:

$x=$	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$y=$	0	−0,87	−1,23	−1,73	−2,12	−2,45	−2,74	−3

Это даст симметричную ветвь кривой по отношению к оси Ox, т.-е. такую, которая, будучи начерчена вниз от оси Ox, по сгибании бумаги по Ox, совпадет с верхней кривой.

Только что изображенная кривая, начерченная полностью, т.-е. с обеими ветвями, относится к квадратным параболам, всякое уравнение которых имеет общий вид:

$$y^2 = ax.$$

Параболы имеют большое значение в технике, так как умелым подбором a, многие, полученные опытным путем кривые, могут быть заменены ветвями парабол.

Другая, часто встречаемая в технике кривая, носит название равнобокой гиперболы; ее уравнение имеет форму:

$$xy = m,$$

где m — постоянное число.

Такая гипербола для $m = 5000$ показана на фиг. 44; она дает зависимость между диаметром обтачиваемого на токарном станке предмета (с определенной скоростью резания) и числом оборотов при следующих данных: пусть D выражает в миллиметрах диаметр предмета; тогда окружность предмета в метрах будет:

$$C = \frac{\pi D}{1000}.$$

Если N есть число оборотов предмета в минуту, а V — окружная скорость в метрах в минуту, то:

$$V = NC = N\frac{\pi D}{1000},$$

что даст:

$$ND = \frac{1000 . V}{\pi}.$$

Если скорость резания равна, напр., 15,7 м. в минуту, то:

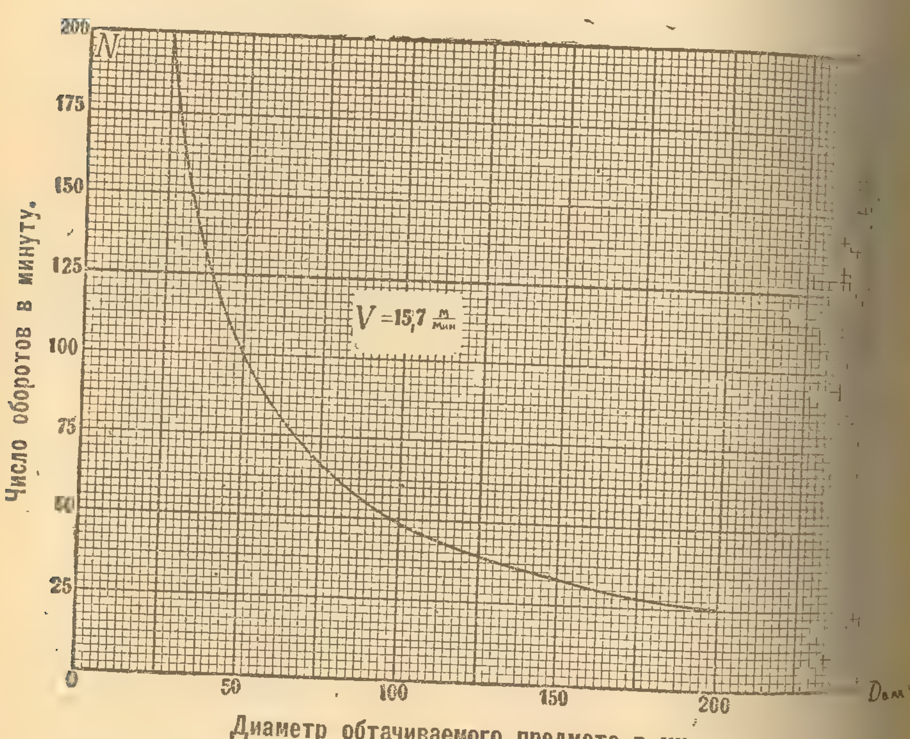
$$ND = \frac{1000 \times 15{,}7}{3{,}1416} = 5000.$$

Положим $D = x$ и $N = y$,

тогда $xy = 5000.$

Это и есть та равнобокая гипербола, которая изображена на фиг. 44.

Взглянув на кривую, мы можем ответить, напр., на следующие вопросы:



Фиг. 44.

Если скорость резания 15,7 м. в минуту, а диаметр обтачиваемого предмета 75 мм., то каково необходимое число оборотов в минуту? Ответ: приблизительно 66 оборотов.

Если при скорости резания в 15,7 м. в минуту число оборотов равно 30, то каков диаметр обтачиваемого предмета? Ответ: около 161 мм.

Для пользования в мастерской кривые, подобные вышеописанной, должны быть построены в довольно большом масштабе для различных скоростей резания, напр., для тех, которые приведены в условии задачи 98 в предыдущей главе.

Полезным упражнением будет построение этих кривых на основании данных, вычисленных для таблицы, которую получат после решения этой задачи.

Задачи.

Примечание. Делая построения кривых, пользуйтесь по возможности крупными масштабами.

99. На основании уравнения прямой, изображенной на фиг. 39, определите точку пересечения прямой с осью Ox.

100. Определите нормальные размеры для шпонки вала с диаметром в 96 мм., пользуясь фиг. 41.

101. По кривой, изображенной на фиг. 44, определите:

(а) для какого диаметра предмета, обтачиваемого со скоростью в 15,7 метра в минуту, требуется 125 оборотов в минуту?

(б) сколько оборотов в минуту должен делать вал диаметром 120 мм. при скорости резания в 15,7 м. в минуту?

102. Для валов, вращающихся во втулках с внутренним диаметром в d мм., диаметр должен быть меньше (в миллиметрах) на

$$a = 0{,}025 + 0{,}004\sqrt{d}.$$

Определите значения a, соответствующие втулкам с диаметрами от 0 до 250 мм. через 25 мм., и постройте соответствующую кривую.

103. Число лошадиных сил автомобилей определяется в Америке по формуле:

$$H.P. = \frac{D^2N}{16},$$

где $H.P.$ обозначает число лошадиных сил, D—диаметр цилиндров в сантиметрах, а N число цилиндров у автомобиля.

Постройте на одном листе две кривых; одну для четырехцилиндрового автомобиля, а другую для шестицилиндрового. Начните с диаметров 8 см. и кончите 15 см. Диаметры в подхо-

дящем масштабе откладывайте по оси абсцисс, а *H. P.* по оси ординат.

104. Одна крупная американская компания, изготовляющая электрические моторы определенного типа, расценивает их следующим образом:

Моторы в одну лош. силу (1 *H. P.*) в 70 долларов (1 доллар около двух рублей золотом); 2 *H. P.* — 90 дол.; 3 *H. P.* — 105 дол.; 5 *H. P.* — 145 дол.; $7\frac{1}{2}$ *H. P.* — 205 дол.; 10 *H. P.* — 255 дол.; 15 *H. P.* — 350 дол.

Нанесите *H. P.* в подходящем масштабе по оси абсцисс, а соответствующие цены по оси ординат; проведите затем прямую линию, которая по возможности лучше охватывала бы все данные. Найдите уравнение этой линии.

ГЛАВА X.

Геометрические построения.

§ 44. Определения.

Геометрия имеет дело со свойствами, построением и измерением линий, поверхностей и тел. Знание оснований геометрии необходимо для тех лиц, которым приходится делать разметки или разбивки, вычислять площади фигур, объемы или веса тел и т. д.

Тело имеет три измерения: длину, ширину и высоту (или толщину).

Поверхность имеет два измерения: длину и ширину.

Линия имеет одно измерение—длину.

Точка не имеет ни одного измерения.

Для определения положения точки в пространстве, нужно дать три размера: на поверхности — два размера; на линии — один размер.

Передвижение точки в пространстве дает линию.

Передвижение линии дает поверхность.

Передвижение поверхности дает тело.

Самою простою линией является **прямая.**

Самою простою поверхностью — **плоскость.**

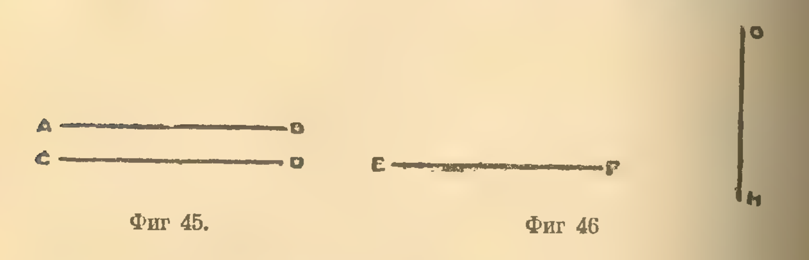
Параллельными прямыми называются прямые, сохраняющие равное расстояние друг от друга (фиг. 45).

Горизонтальной прямой называется прямая, параллельная горизонту, или лежащая по уровню (фиг. 46).

Вертикальною или отвесною прямою называется прямая, совпадающая или параллельная нитке отвеса (фиг. 46).

Перпендикулярными прямыми называются две таких прямых, что когда одна становится горизонтальною, то другая превращается

в вертикальную (фиг. 47). Говорят также, что одна прямая нормальна к другой, или что обе прямых образуют **прямые** углы.



Фиг 45. Фиг 46

§ 45. Углы.

Угол образуется от встречи или от пересечения двух прямых (фиг. 48). Две прямые AB и CD, пересекаясь в точке O, дают четыре угла: AOC, AOD, DOB и BOC. Углы определяют направление прямых. Обе прямые называются сторонами угла; точка их пересечения O—вершиной угла.



Фиг. 47. Фиг. 48.

Углы обозначаются часто значком $\angle$.

Таким образом $\angle AOD$ читается так: угол AOD. В середине всегда ставится буква, обозначающая вершину.

Прямые углы (фиг. 47) имеют стороны взаимно перпендикулярные. Все четыре угла AOC, AOD, DOB и BOC, имеющие взаимноперпендикулярные стороны, суть углы прямые и равны между собою. По одну сторону одной из прямых мы имеем два прямых угла; всего же вокруг точки O мы имеем четыре прямых угла.

Острые углы — те из углов (подобно AOC и DOB на фиг. 48), которые меньше, чем прямой угол.

Тупые углы — те из углов (подобно AOD и BOC на фиг. 48), которые больше, чем прямой угол.

Прямой угол, часто обозначаемый буквою d, может служить мерою углов.

Смежными углами называются углы с общей вершиной, общей стороной, и лежащие по одну сторону прямой; напр., AOC и AOD будут смежными углами, так как лежат по одну сторону прямой CD. Так как по одну сторону всякой прямой лежат только два прямых угла, то, следовательно, сумма двух смежных углов, из которых один острый, а другой тупой, будет обязательно равна двум прямым.

Мы можем это изобразить так:

$$\angle AOC + \angle AOD = 2d,$$

подобным же образом

$$\angle DOB + \angle AOD = 2d.$$

Если мы вычтем друг из друга оба равенства, мы получим:

$$\angle AOC - \angle DOB = 0,$$

следовательно,

$$\angle AOC = \angle DOB.$$

Таким же образом доказывается, что

$$\angle AOD = \angle BOC.$$

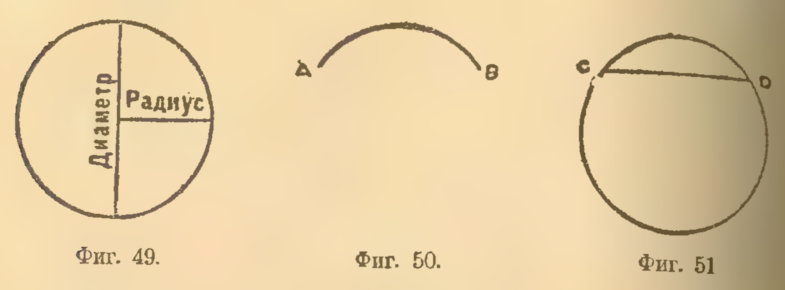
Такие углы, стороны которых служат продолжением друг друга, называются **противоположными**; противоположные углы равны.

§ 46. Круг и окружность.

Кругом называется плоская фигура, ограниченная кривою линией, все точки которой находятся на равном **удалении** от одной точки, называемой **центром**. Это расстояние называется **радиусом**, а кривая носит название **окружности**. Удвоенный радиус, или длина прямой, идущей от любой точки окружности через центр и до пересечения снова с окружностью в другой точке, называется **диаметром** (фиг. 49).

Дугою называется часть окружности (AB, фиг. 50).

Хордою называется прямая, соединяющая две точки окружности (CD, фиг. 51).



Фиг. 49. Фиг. 50. Фиг. 51

Диаметр есть самая большая из хорд.

Окружность делится на 360 частей, называемых **градусами.**

Градус делится на 60 частей, называемых **минутами.**

Минута делится на 60 частей, называемых **секундами.**

Градусы обозначаются небольшим кружком, стоящим вверху числа (1°).

Минуты обозначаются штрихом, стоящим вверху числа ($1'$), так же, как условно обозначаются футы.

Секунды обозначаются двумя малыми штрихами вверху числа ($1''$) так же, как условно обозначаются дюймы.

Зависимости между частями окружности C будут:

$$C = 360^\circ$$
$$1^\circ = 60'$$
$$1' = 60'';$$

следовательно:

$$1^\circ = 60 \times 60 = 3600''$$
$$C = 360 \times 3600 = 1296000''.$$

§ 47. Измерение углов.

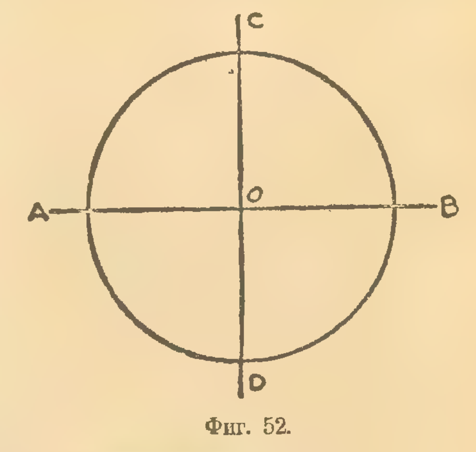
Углы измеряются числом градусов, минут и секунд, которые содержит дуга, заключенная между его сторонами, при чем за центр дуги берется вершина угла, а радиус совершенно произволен, так как число делений дуги от этого не изменится (меняется лишь их размер).

Так как вокруг точки располагаются четыре прямых угла, то каждый прямой угол отсекает одну четвертую часть окруж-

ности, имеющей эту точку центром. Полная окружность имеет 360°, следовательно, дуга в четверть окружности, служащая для измерения прямых углов, имеет 90° (фиг. 52).

Острый угол имеет менее 90°, а тупой угол — более 90°.

Дополнительным углом называется такой угол, который вместе с данным углом составит 180°, т.-е. два прямых угла. Так, дополнительный угол для 60° будет 120°, для 50° будет 130° и т. д.



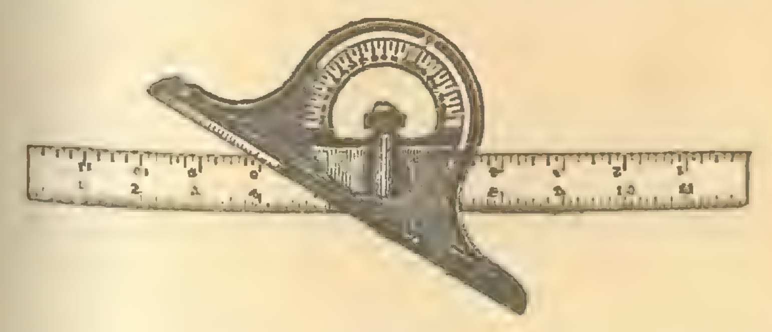
Фиг. 52.

Два смежных угла, очевидно, будут дополнительными углами один для другого, так как вместе они дают два прямых.

Иногда интересно рассматривать углы, служащие дополнением данных углов не до 180°, а лишь до 90°.

Дополнение угла в 60° до прямого угла будет 30°. Такой угол может быть назван **«добавочным»** (в отличие от дополнительного).

Для измерения углов существует прибор, называемый **транспортиром**. Транспортир, показанный на фиг. 53, служит для изме-



Фиг. 53.

рения углов в мастерской. Для чертежных работ транспортир имеет несколько иную, упрощенную форму, и состоит из полукруга с нанесенными на нем градусами и более мелкими делениями.

Существует также способ откладывания углов по хорде дуги известного радиуса.

Следующая табличка дает длину хорды в миллиметрах для различных углов от 1° до 90° при радиусе дуги в 100 миллиметров.

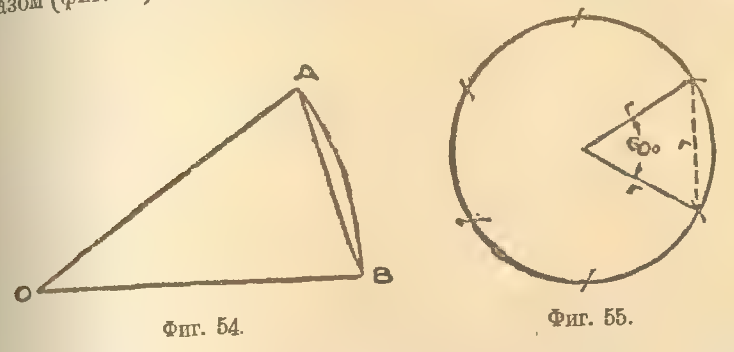
Градусы.	мм.	Градусы.	мм.	Градусы.	мм.	Градусы.	мм.	Градусы.	мм.
0,5	0,9	11	19,2	31	53,4	51	86,1	71	116,1
1	1,7	12	20,9	32	55,1	52	87,7	72	117,6
1,5	2,6	13	22,6	33	56,8	53	89,2	73	119,0
2	3,5	14	24,4	34	58,5	54	90,8	74	120,4
2,5	4,4	15	26,1	35	60,1	55	92,3	75	121,7
3	5,2	16	27,8	36	61,8	56	93,9	76	123,1
3,5	6,1	17	29,6	37	63,5	57	95,4	77	124,5
4	7,0	18	31,3	38	65,1	58	97,0	78	125,9
4,5	7,8	19	33,0	39	66,8	59	98,5	79	127,2
5	8,7	20	34,7	40	68,4	60	100,0	80	128,6
5,5	9,6	21	36,4	41	70,0	61	101,5	81	129,9
6	10,5	22	38,2	42	71,7	62	103,0	82	131,2
6,5	11,3	23	39,9	43	73,3	63	104,5	83	132,5
7	12,2	24	41,6	44	74,9	64	106,0	84	133,8
7,5	13,1	25	43,3	45	76,5	65	107,5	85	135,1
8	13,9	26	45,0	46	78,1	66	108,9	86	136,4
8,5	14,8	27	46,7	47	79,7	67	110,4	87	137,7
9	15,7	28	48,4	48	81,3	68	111,8	88	138,9
9,5	16,6	29	50,1	49	82,9	69	113,3	89	140,2
10	17,4	30	51,8	50	84,5	70	114,7	90	141,4

Как это делается на практике, показано на фиг. 54.

Очень важно обратить внимание на то, что хорда дуги в 60° равна ее радиусу. Так как в полной окружности 360°, т.-е. 60° × 6, то, откладывая радиус любого круга вдоль окружности (фиг. 55), мы разделим ее на шесть равных частей. Это выражают словами так: сторона **правильного шестиугольника** равна радиусу.

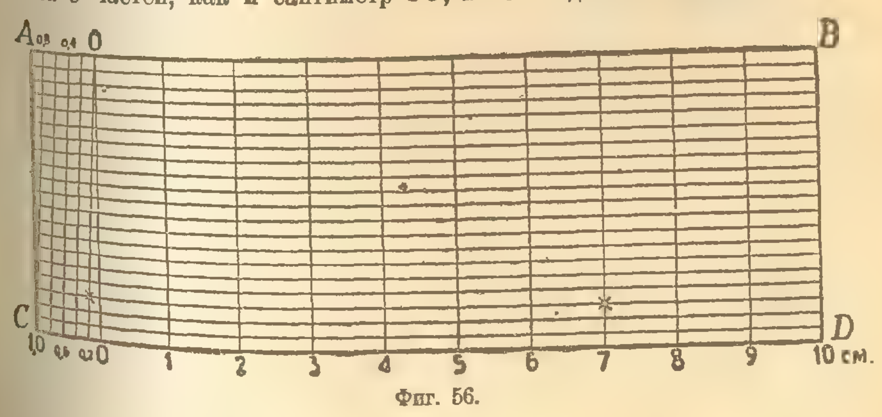
Чтобы можно было для построения углов применять приведенную таблицу длин хорд, необходимо откладывать длины хорд

с точностью до $\frac{1}{10}$ мм. или до $\frac{1}{100}$ сантиметра. С этою целью применяют **сложный** или **поперечный** масштаб. Строится он следующим образом (фиг. 56). Чтобы не иметь дела с очень мелкими делениями,



Фиг. 54. Фиг. 55.

мы построим поперечный масштаб для целых сантиметров, дающий возможность отыскивать сотые доли см., т.-е. масштаб, дающий **точность** в $\frac{1}{100}$. На прямой CD откладываем 11 целых сантиметров и из всех 12 точек делений восставляем перпендикуляры. Так как нам нужны сотые доли, то число 100 разбиваем на 2 произвольных множителя, напр., 5×20, и делим первый отложенный сантиметр CO на 5 частей, а на крайних перпендикулярах AC и BD откладываем по 20 равных произвольных частей, напр., по 0,2 см. Соединяя точки деления крайних перпендикуляров прямыми, получим сеть прямых, параллельных прямой CD. На последней из этих линий, AB, первый сантиметр AO делим на 5 частей, как и сантиметр CO, и точки деления на этих двух

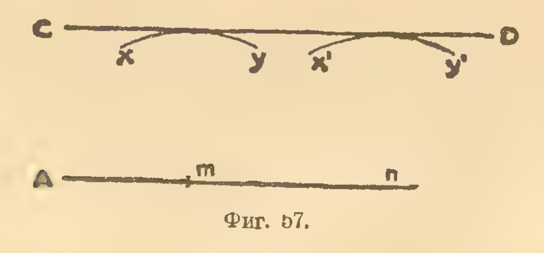


Фиг. 56.

сантиметрах, AO и CO, соединяем друг с другом наискось, т.-е. точку O с точкой 0,2, точку 0,2 с точкой 0,4 и т. д., и наконец, точку 0,8 с точкою C. Полученные прямые будут между собою параллельны и будут везде отстоять друг от друга на расстояние 0,2 см., но между крайними из этих линий и прямой AC, с одной стороны, и прямой OO—с другой, расстояния постепенно уменьшаются от 0,2 см. до 0,0 см., проходя на продольных параллелях через 20 последовательных ступеней. Ясно, что каждая из этих ступеней отличается от предыдущей на $\frac{1}{20}$ долю от 0,2 см., т.-е. на $\frac{1}{100}$ см., и потому мы в углу между линиями OO и $0{,}2\,O$ имеем 20 разных отрезков, равных 0,01;0,02;0,03;....0,20 см. Следовательно, с помощью поперечного масштаба мы можем найти длину отрезка (до 11 см.) с точностью до $\frac{1}{100}$ см. Напр., пусть надо найти отрезок 71,7 мм. или 7,17 см.; отыскиваем на одной из параллелей две точки делений, которые отстоят друг от друга на $7+0{,}17$ см.; это будут две точки, отмеченные на масштабе крестиками. Берем циркулем расстояние между этими двумя точками и откладываем, где нужно, искомый отрезок в 71,7 мм.

§ 48. Провести на известном расстоянии прямую, параллельную данной прямой.

На фиг. 57 показан практический способ, как это сделать. Две произвольные точки: m и n на прямой AB берутся за центры



Фиг. 57.

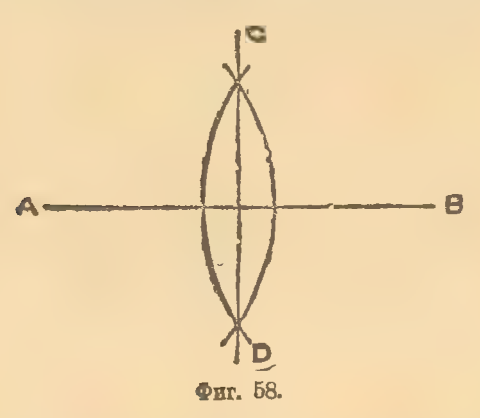
для двух небольших дуг xy и $x'y'$, проведенных радиусом, равным требуемому расстоянию между прямыми; линия CD проводится так, чтобы она касалась обеих дуг.

§ 49. Деление данного отрезка прямой пополам.

На фиг. 58 показано, как это достигается графическим путем, т.-е. посредством так наз. геометрического построения. Ножки циркуля раскрывают произвольно, но на длину бо̀льшую, чем половина прямой, и затем, беря точки A и B за центры, проводят две дуги, пересекающиеся в точках C и D по обе стороны прямой. Соединив эти точки прямой, мы получим в точке пересечения ее с AB середину этого отрезка. Заметим, что обе прямые AB и CD будут перпендикулярны друг к другу.

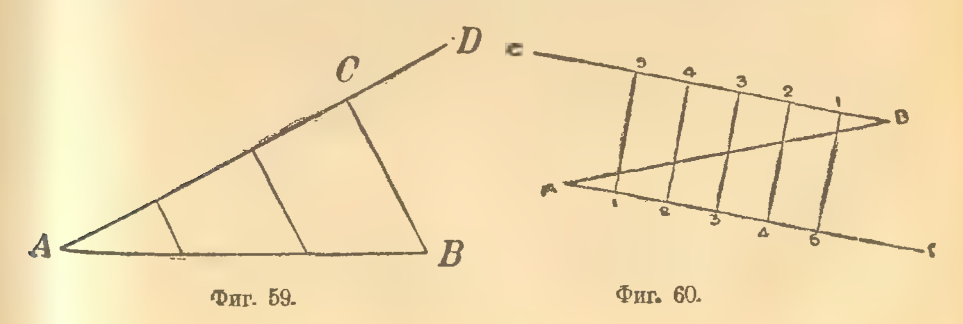
§ 50. Разделить данный отрезок прямой на несколько равных частей.

Покажем два способа решения этого вопроса. Первый способ дан на фиг. 59. Пусть требуется разделить AB на 3 равных



Фиг. 58.

части. Из A проводим, под любым углом, линию AD и откладываем на ней три произвольных, но равных между собою от-



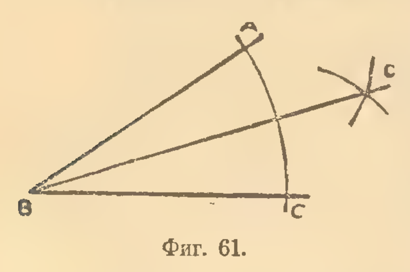
Фиг. 59. Фиг. 60.

резка. Из последней точки C, полученной таким образом, проводим линию BC, а из промежуточных точек—параллельные ей линии, которые разделят AB на требуемое число частей.

Второй способ показан на фиг. 60. Из B проводим под произвольным углом прямую BC, а из A в другую сторону параллельную ей прямую AD. Пусть требуется разделить AB на 6 частей; откладываем по BC и по AD 5 равных, но произвольных отрезков, т.-е. на один менее заданного числа. Отметив их цифрами 1, 2, 3, 4, 5 как по BC, так и по AD, соединяем точки попарно, как показано на чертеже; в результате мы разделим AB на 6 частей.

§ 51. Деление угла пополам.

На фиг. 61 показан способ деления угла пополам или получения биссектрисы или равноделящей данного угла.



Фиг. 61.

Вершину угла B берем за центр и проводим дугу CA произвольного радиуса. Затем, любым радиусом проводим две дуги, имеющие центрами соответственно точки A и C на сторонах угла. Точку пересечения D этих дуг соединяем с вершиной угла B. Линия BD будет биссектрисой данного угла, так как все ее точки будут соответственно равно удаленными от сторон угла

§ 52. Проведение перпендикуляра к данной прямой из точки на этой прямой.

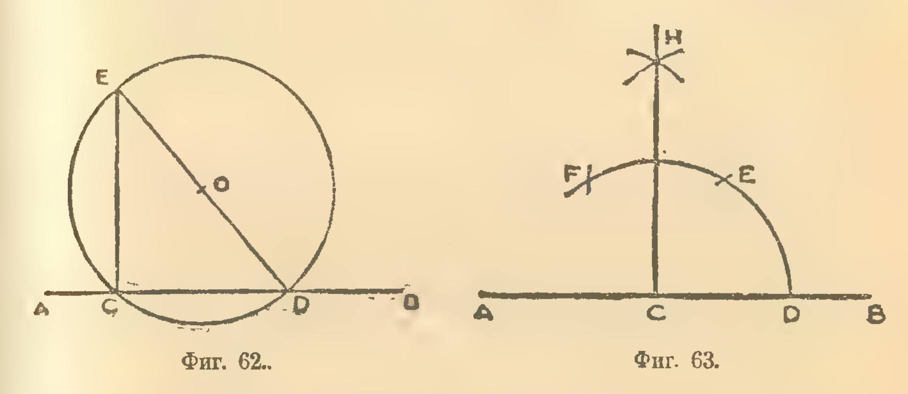
Чтобы восставить из точки C на прямой AB перпендикуляр к этой прямой, поступим следующим образом (фиг. 62).

Произвольная точка O, вне прямой, берется за центр окружности радиуса OC; вторая точка пересечения этой окружности с прямой будет D. Затем, проведем линию DO, которая пересечет окружность в точке E. Соединив E с C, получим желаемый перпендикуляр.

Можно еще произвести построение подобное тому, которое было применено при делении отрезка прямой пополам (§ 49.

фиг. 58). Имея данную прямую и точку на ней, мы откладываем по обе стороны от этой точки два равных отрезка; это даст нам обе конечных точки отрезка AB двойной величины: проведение перпендикуляра не представляет теперь никаких затруднений (см. CD, фиг. 58).

Другой довольно удобный способ восставления перпендикуляра показан на фиг. 63. Берем данную точку C на прямой AB

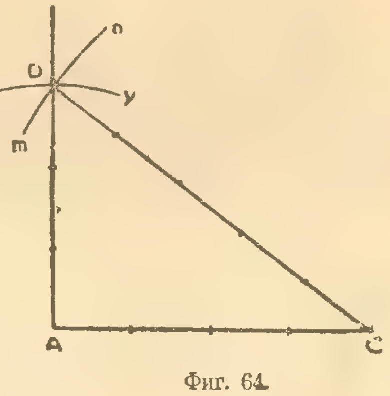


Фиг. 62. Фиг. 63.

за центр и произвольным радиусом CD описываем часть окружности. Этим же радиусом намечаем точки E и F на окружности, откладывая $DE = EF = CD$. Беря полученные две точки за новые центры, проводим любым радиусом две дуги, пересекающиеся в точке H. Соединяя H с C получим желаемый перпендикуляр.

Легко доказать правильность этого построения. Действительно, дуга DE равна 60°, так как ее хорда равна радиусу. С другой стороны, получение точки H и соединение ее с точкой C дало нам еще половину дуги EF в 60°, т.-е. 30°. Угол HCD равен поэтому:

$$60° + 30° = 90°.$$



Фиг. 64.

На фиг. 64 показан еще один способ решения этой задачи путем построения

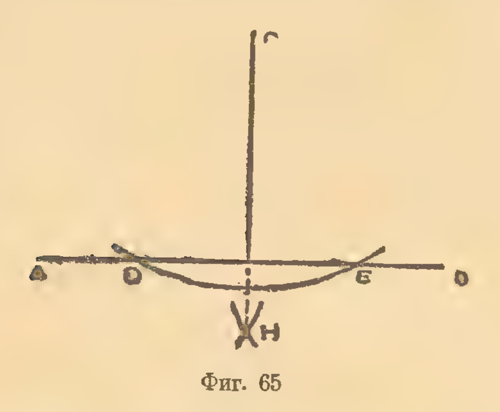
прямоугольного треугольника, основанный на том, что (см. стр. 35)

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Катет AC равен четырем произвольным единицам; это даст нам точку C на прямой AB. Берем C за центр и проводим дугу mn радиусом в 5 единиц, выбранных выше. Затем берем A за центр и проводим дугу xy радиусом в три единицы. Обе дуги пересекаются в точке D. Прямая DA образует таким образом прямой угол с AC, и поэтому DA будет перпендикулярна к AB в точке A.

§ 53. Опускание перпендикуляра из точки на прямую.

Пусть требуется опустить перпендикуляр из точки C на прямую AB (фиг. 65). Взяв точку C за центр, проведем дугу произвольного радиуса, которая пересечет данную прямую в точках



Фиг. 65

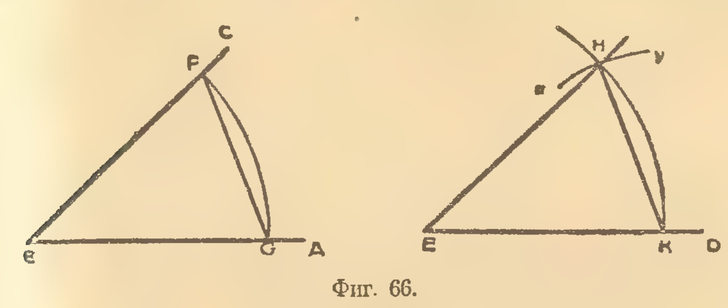
D и E. Затем, взяв точки D и E за центры, проведем две дуги произвольного, но одинакового радиуса, которые пересекутся в точке H. Прямая HC будет искомый перпендикуляр.

§ 54. Построение некоторых простых углов.

Мы уже умеем строить углы в 90° и 60°; кроме того, мы умеем делить углы пополам; следовательно, мы можем получить углы в 45° и 30°, а затем в $22\frac{1}{2}$° и 15° и т. д.

§ 55. Построение равных углов.

Пусть оудет дан угол ABC и прямая DE (фиг. 66). Требуется построить угол HED, равный данному. Взяв B за центр, проведем произвольным радиусом дугу, которая пересечет стороны



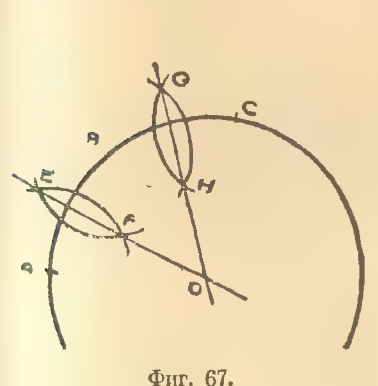
Фиг. 66.

данного угла в точках G и F. Взяв E за центр, проведем тем же радиусом дугу KH, при чем точка H получается засечением этой дуги дугою xy с центром K и с радиусом, равным длине хорды GF. Таким образом мы получим:

$$\angle HEK = \angle FBG.$$

§ 56. Найти центр дуги окружности.

Пусть дана некоторая дуга (фиг. 67) ABC, но центр ее не обозначен. Выберем три произвольных точки A, B и C на этой дуге; затем, взяв соответственно A и B за центры, проведем



Фиг. 67.

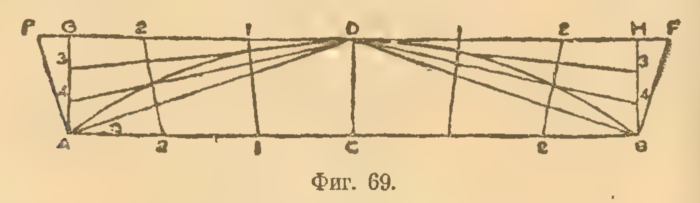
Фиг. 68.

произвольным радиусом две дуги, пересекающиеся в точках E и F. Такое же построение повторяем для точек B и C; оно даст нам две дуги, пересекающиеся в точках G и H. После этого проводим прямые EF и GH, которые своим пересечением дадут искомый центр окружности.

§ 57. Провести окружность через три данные точки.

Построение такое же, как только что было объяснено. Как только мы получим центр O окружности, проходящей через три точки ABC (фиг. 67), мы можем провести и требуемую окружность. На фиг. 68 данные точки расположены в виде вершин данного треугольника; построение то же самое. Заметим, что центр круга описанного вокруг треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров, делящих стороны треугольника пополам.

Часто случается, что центр окружности, проходящей через три точки, получается слишком далеко, и им нельзя воспользоваться для проведения дуги; тогда приходится строить дугу по



Фиг. 69.

точкам на основании существующих для этого таблиц; но можно применить также следующий графический прием, если одна из трех точек находится как раз по середине двух других (фиг. 69). Даны точки A, D, B, при чем D по середине между A и B. Проводим хорду AB и через D линию EF, параллельную ей. Точки E и F получены путем восставления перпендикуляров в A и в B соответственно к хордам AD и BD. Пусть C будет срединой хорды AB. Разделим AC и BC на некоторое число равных частей, напр., на три. Чем их больше, тем точнее получится построение. Разделим DE и DF на то же число частей. Затем проведем линии 1-1, 2-2 (сколько потребуется). Опустим из A и B перпендикуляры на EF; это даст нам линии AG и BH, которые надо разделить на то же самое число частей. Проведем

линии $D-3$, $D-4$, и найдем пересечение этих лучей соответственно с ранее полученными 1-1, 2-2. Точки пересечения соединим плавной кривой; это и будет искомая дуга.

§ 58. Определить радиус данной дуги.

На фиг. 70 показано, какие размеры должны быть известны, а именно: длина хорды и стрела дуги. На фиг. 71 снова показана дуга, а также обозначен искомый центр ее. Хорда дуги AC пусть будет иметь длину c; стрела BD — высоту h; неизвестный радиус AO назовем r.

Имеем:

$$DO = OB - BD = AO - BD = r - h;$$

$$AD = \frac{AC}{2} = \frac{c}{2};$$

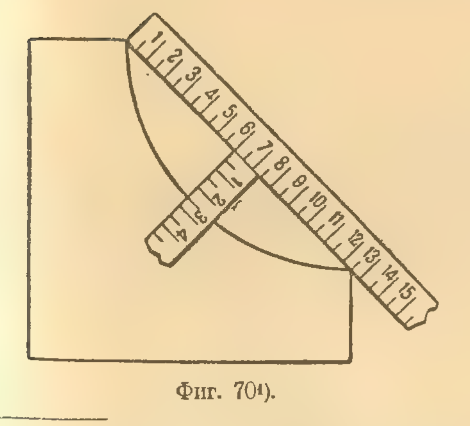
$$AO^2 = AD^2 + DO^2;$$

следовательно,
$$r^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (r-h)^2;$$

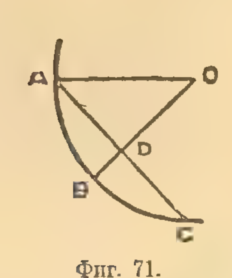
или
$$r^2 = \frac{c^2}{4} + r^2 - 2rh + h^2,$$

откуда
$$2rh = \frac{c^2}{4} + h^2;$$

или
$$r = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2}{2h}.$$



Фиг. 70[1]).



Фиг. 71.

[1]) На фиг. 70 хорда ошибочно изображена равной 12,5 см вместо 12.

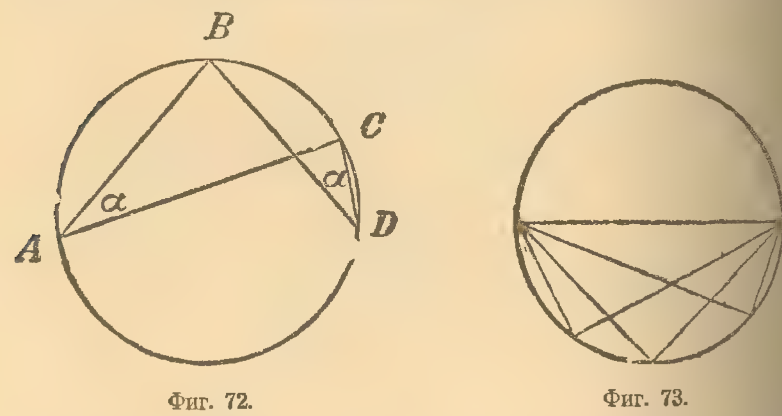
Словами это выразится так: радиус дуги равен сумме квадрата полухорды и квадрата стрелы, деленной на удвоенную стрелу.

На фиг. 70 хорда имеет длину в 12 см (см. примечание на стр. 115) и стрелу в 2,5 см, следовательно, радиус будет:

$$r = \frac{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2 \times \frac{5}{2}} = \frac{144 + 25}{4 \times 5} = \frac{169}{20} = 8{,}4 \text{ см.}$$

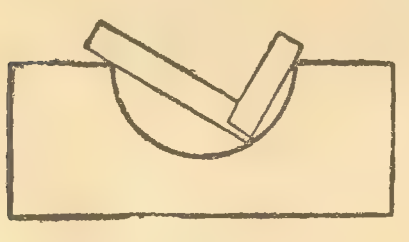
§ 59. Углы с вершиною на окружности.

До сего времени мы измеряли центральные углы, т.-е. такие, у которых вершина лежала в центре окружности круга; их мерою служила дуга этой окружности, заключенная между сторонами угла. Если, однако, вершина лежит на самой окружности, как по-



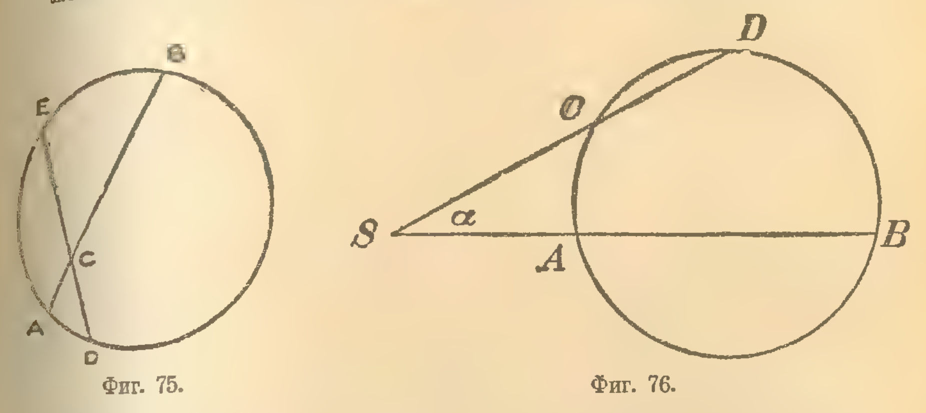
Фиг. 72. Фиг. 73.

казано на фиг. 72, то мерою угла служит лишь половина дуги окружности, заключенная между сторонами угла; так, напр., угол *CAB* (фиг. 72) измеряется половиною дуги *CB*; частным случаем является угол, опирающийся своими сторонами на диаметр круга (фиг. 73); тогда соответствующая дуга является, очевидно, полуокружностью и имеет 180°, а потому мерою угла будет половина этой полуокружности или 90°; следовательно, такой угол будет всегда прямым.



Фиг. 74.

На фиг. 74 показан способ проверки правильности дуги, равной полуокружности, посредством наугольника; при передвижении этого наугольника таким образом, что обе его стороны



Фиг. 75. Фиг. 76.

касаются краев полуокружности (напр., формовочной модели), вершина прямого угла должна обязательно лежать на полуокружности.

60. Углы с вершиною внутри или вне круга.

На фиг. 75 показан угол, имеющий вершину **внутри** круга; мерою такого угла служит **полусумма** дуг EB и AD, отсекаемых сторонами угла и их продолжением на окружности.

На фиг. 76 показан угол, имеющий вершину **вне** круга; тогда мерою угла служит **полуразность** дуг DB и CA, отсекаемых сторонами угла на окружности.

Задачи

105. Колесо имеет шесть спиц; чему равен угол между осями двух смежных спиц?

106. Шестерня в 48 зубьев имеет наружный диаметр в 32 см. Определите длину дуги между срединами зубьев, а также величину соответствующей дуги в градусах

107. Передаточный ремень охватывает шкив диаметром в 90 см. по дуге 187°. Определите, как показано на фиг. 77, соответствующую длину дуги в сантиметрах.

108. Разметьте три точки A, B и C, согласно с данными на фиг. 78 размерами, посредством восставления перпендикуляра из

точки D. Определите вычислением расстояние между точками A и C, а также B и C; затем проверьте измерением ваше построение.

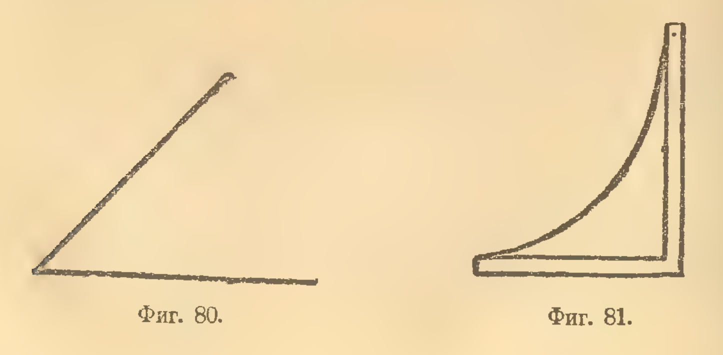
Фиг. 77.

Фиг. 78.

Фиг. 79.

109. Разметьте четыре точки, показанные на фиг. 79.

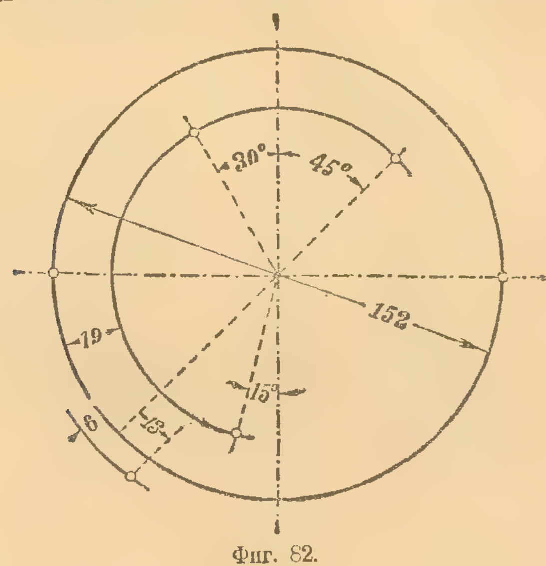
110. Постройте угол, равный показанному на фиг. 80, и разделите его пополам.



Фиг. 80. Фиг. 81.

111. Определите длину радиуса дуги, показанной на фиг. 81.

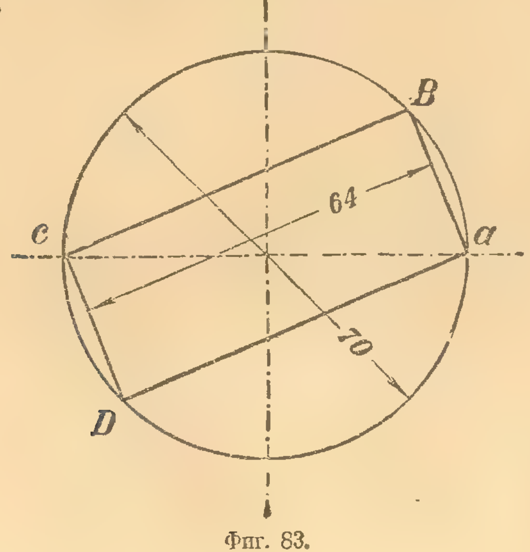
112. Проведите прямую длиною в 11,4 см и разделите ее на пять равных частей.



Фиг. 82.

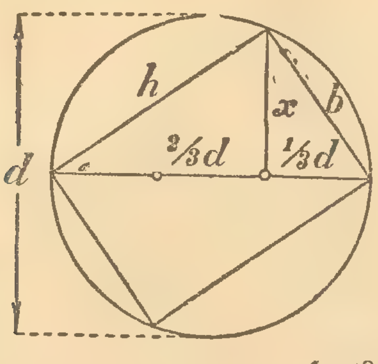
113. Разметьте точки, показанные на фиг. 82.

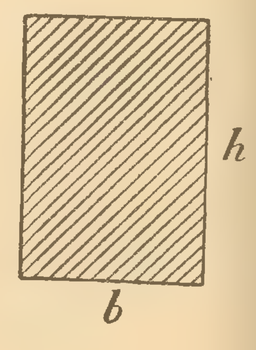
114. Определите длину *aB*, по данным фиг. 83, посредством вычисления.



Фиг. 83.

115. Чтобы вытесать из круглого бревна наиболее прочную балку прямоугольного сечения, размеры этого сечения определяют таким образом, как показано на фиг. 84. Найти отношение высоты балки h к ее ширине b.





Фиг. 84.

ГЛАВА XI.

Построение геометрических фигур.

§ 61. Многоугольники.

Всякая плоская фигура с произвольным числом сторон, а следовательно, и углов, называется **многоугольником**. Существуют особые названия для некоторых многоугольников, так, напр., треугольник, четыреугольник, пятиугольник и т. д.

Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны и все углы равны; одно не является обязательным следствием другого, за исключением треугольника.

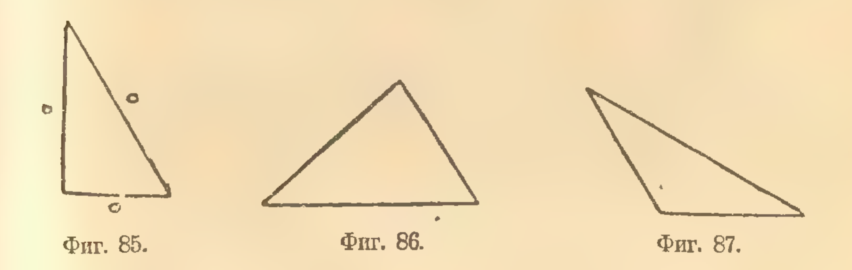
Стороны многоугольника пересекаются в точках, называемых **вершинами**.

Сумма сторон многоугольника называется **периметром**.

§ 62. Треугольники.

Треугольник является многоугольником с наименьшим числом сторон. Различают несколько видов треугольников.

На фиг. 85 показан **прямоугольный** треугольник. Стороны прямого угла (*a* и *b*) называются **катетами**; а противоположная ему сто-



Фиг. 85. Фиг. 86. Фиг. 87.

рона (c) **гипотенузою.** Между сторонами прямоугольного треугольника существует зависимость: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, т.-е.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Закон этот был дан древним греческим ученым, Пифагором; поэтому он называется Пифагоровой теоремой.

На фиг. 86 показан **остроугольный** треугольник, у которого все три угла острые.

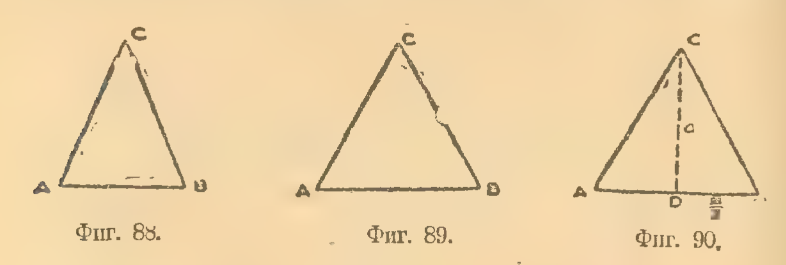
На фиг. 87 показан **тупоугольный** треугольник, у которого один из углов тупой.

На фиг. 88 показан **равнобедренный** треугольник; у него обе стороны AC и BC равны, что вызывает также равенство противолежащих углов:

$$\angle CBA = \angle CAB.$$

На фиг. 89 показан **равносторонний** треугольник; у него все стороны и все углы равны.

Определим зависимость между высотою a равностороннего треугольника и его стороною s (фиг. 90).



Фиг. 88. Фиг. 89. Фиг. 90.

Опустив из вершины C перпендикуляр на основание AB, разделим его в точке D пополам. Рассмотрим один из полученных прямоугольных треугольников CDB. Он имеет гипотенузу s, а катеты $\frac{s}{2}$ и a; следовательно:

$$s^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + a^2;$$

откуда

$$a^2 = s^2 - \frac{s^2}{4} = \frac{4s^2 - s^2}{4} = \frac{3s^2}{4};$$

следовательно,

$$=\sqrt{\frac{3s^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{s^2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}s;$$

а так как

$$\sqrt{3}=1,732,$$

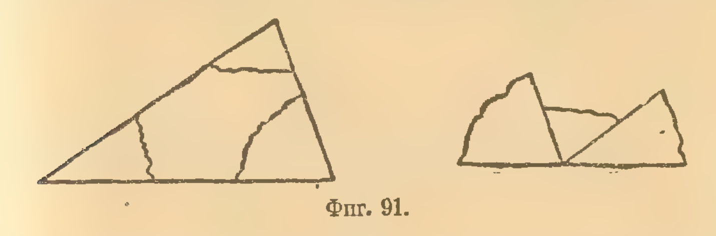
то

$$a=0,866s.$$

Если дана высота, а по ней требуется определить сторону, мы будем иметь:

$$s=\frac{a}{0,866}=1,155a.$$

Если мы вырежем какой-угодно треугольник из бумаги (фиг. 91) и оторвем все три угла, а затем сложим эти углы вершинами и сторонами, как показано на чертеже, то послед-



Фиг. 91.

ние две стороны дадут прямую линию; это показывает, что сумма всех углов треугольника равна двум прямым, т. е. 180^0.

Для равностороннего треугольника мы имеем:

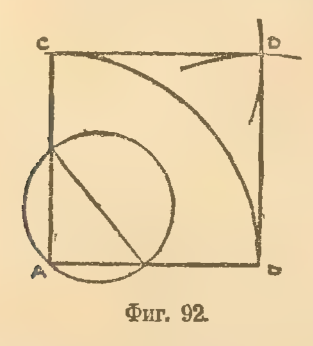
$$60^0+60^0+60^0=180^0.$$

§ 63. Квадрат

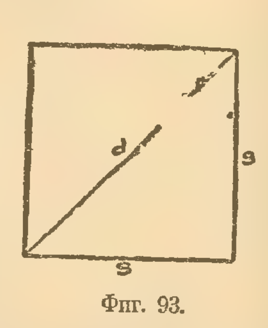
Если у четыреугольника все стороны равны, а все четыре угла прямые, то мы имеем **квадрат**. На фиг. 92 показан способ построения квадрата.

В точке A мы восставим перпендикуляр к стороне AB, затем отложим эту сторону по AC. Имея C и B, построение окончим засечением двух дуг (с радиусом, равным стороне квадрата), что даст четвертую вершину D.

Если желают вписать квадрат в данную окружность, то проводят два взаимноперпендикулярных диаметра и соединяют точки их пересечения с окружностью прямыми.



Фиг. 92.



Фиг. 93.

Определим зависимость между стороною квадрата и **диагональю**, т.-е. линией, идущей из угла в противоположный угол.

Обозначив сторону квадрата через s, диагональ через d (фиг. 93), будем иметь:

$$d^2 = s^2 + s^2 = 2s^2;$$

следовательно,

$$d = \sqrt{2s^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{s^2} = \sqrt{2} \times s,$$

а так как $$\sqrt{2} = 1{,}414,$$

то $$d = 1{,}414s.$$

Обратным образом:

$$s = \frac{1}{1{,}414} d = 0{,}707d.$$

Пример. Ширина четырехгранной головки болта определяется из формулы:

$$W = 1{,}5D + 3 \text{ мм}.$$

Определите диагональ квадрата для $D = \frac{3}{4}$ дм $= 19$ мм.

$$W = 1{,}5 \times 19 + 3 = 31{,}5 \text{ мм.},$$

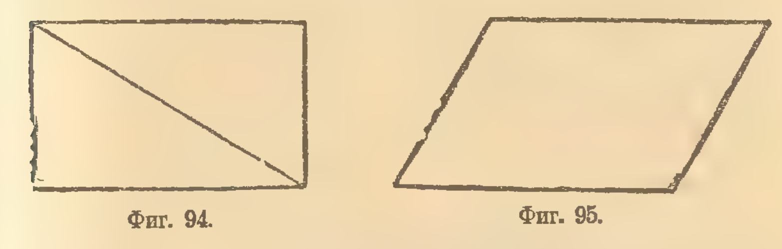
следовательно $$d = 1{,}414 \times 31{,}5 = 44{,}5 \text{ мм.}$$

§ 64. Прямоугольник.

Это—четыреугольник с четырьмя прямыми углами; но стороны равны лишь попарно (фиг. 94). Диагональ делит прямоугольник на два равных прямоугольных треугольника.

§ 65. Параллелограм (фиг. 95).

Это—четыреугольник со сторонами попарно параллельными и попарно равными; но в нем два угла тупых, а два острых, также попарно равных. Обе диагонали не равны, но делят параллелограм на два равных треугольника.



Фиг. 94. Фиг. 95.

Если все четыре стороны параллелограма равны, то фигура называется **ромбом** (фиг. 96). Ромб отличается от квадрата лишь тем, что его углы не прямые. Обе диагонали (малая и большая) пересекаются в центре ромба под прямыми углами.

§ 66. Трапеция.

Это, четыреугольник, у которого лишь две стороны параллельны (фиг. 97).

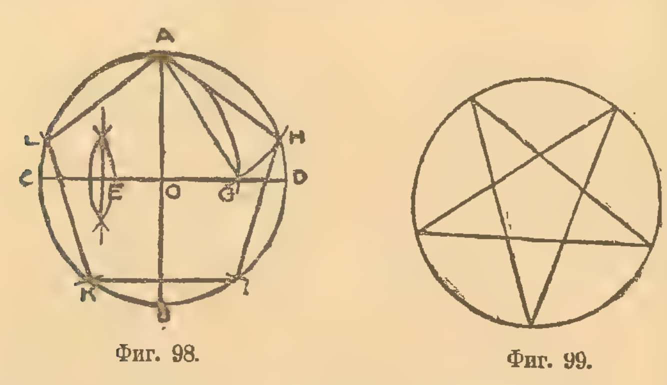


Фиг. 96. Фиг. 97.

§ 67. Пятиугольник.

Всякая фигура с пятью сторонами, а следовательно, и с пятью углами, называется пятиугольником. Чтобы построить правильный вписанный в круг пятиугольник (фиг. 98), поступаем следующим образом.

Проведя два взаимноперпендикулярных диаметра CD и AB, делим радиус CO пополам, что даст точку E. Взяв эту точку за



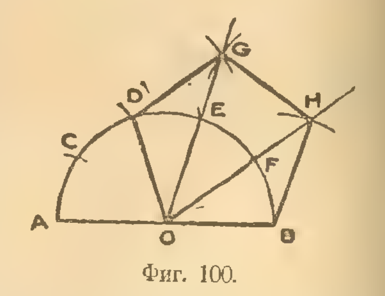
Фиг. 98. Фиг. 99.

центр, радиусом EA засекаем диаметр в точке G; тогда AG есть длина стороны пятиугольника $AHIKL$.

Иногда желательно построить пятиконечную звезду (фиг. 99); для этого делим круг, как было объяснено, на пять частей, и точки соединяем через одну.

Чтобы построить пятиугольник с данной стороною, поступают следующим образом (фиг. 100)

Пусть дана сторона пятиугольника BO. Взяв O за центр, опишем полуокружность до пересечения в A с продолженной стороной. Эту полуокружность делим на пять равных частей. Сначала можно разделить целую окружность на пять частей, а затем каждую часть еще пополам. На практике обыкновенно пользуются транспортиром. Получим точки C, D, E, F. Радиус



Фиг. 100.

OD будет вторая сторона пятиугольника. Чтобы закончить построение, проводим диагонали пятиугольника, проходящие через

точки E и F, и на них посредством засечения получим последние две вершины G и H.

Примечание. Этот способ может быть применен для многоугольника с любым числом сторон. Если число сторон n, то угол между двумя сторонами правильного многоугольника равен:

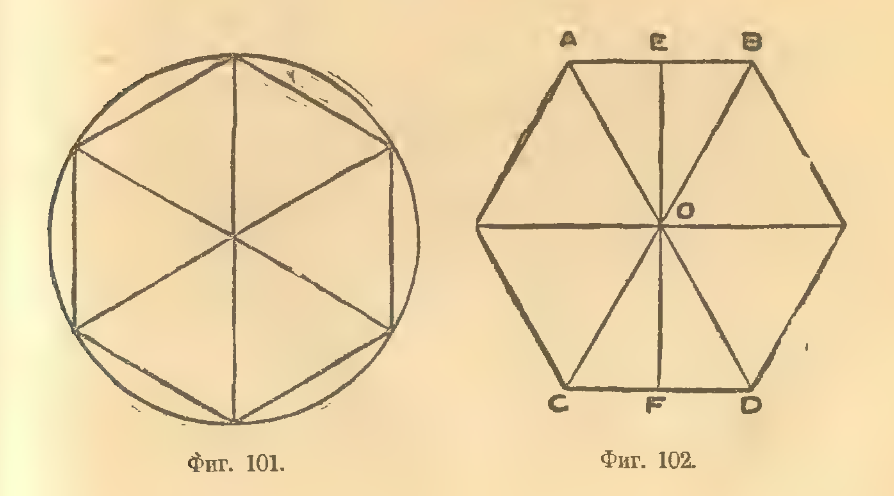
$$\frac{n-2}{n} \times 180^0.$$

Разделив поэтому полуокружность на n частей, проводим радиус, подобно OD на фиг. 100, через вторую точку, а затем, проведя диагонали, постепенно доканчиваем построение путем засечений.

§ 68. Правильный шестиугольник.

Мы знаем, что шестая часть окружности, т.-е. 60^0, имеет хорду, равную радиусу; поэтому нет ничего проще, как вписать правильный шестиугольник в данную окружность; стоит лишь отложить по ней циркулем шесть раз радиус и соединить полученные точки между собою.

Обратно, если дана длина стороны правильного шестиугольника и требуется его построить, то для этого мы сначала чертим окружность радиусом, равным стороне, а затем вписываем шестиугольник (фиг. 101).



Фиг. 101. Фиг. 102.

Когда мы говорили о шестиугольнике, вписанном в окружность,—диаметром круга была диагональ AD (фиг. 102); если окружность начерчена не снаружи, а внутри шестиугольника и касается его сторон, то диаметр этой вписанной окружности будет EF. Он часто служит для обозначения размера данного шестиугольника.

Посмотрим, какова зависимость между AD и EF.

Диагонали шестиугольника делят его на равносторонние треугольники, подобные AOB (фиг. 102). OE, представляющая высоту равностороннего треугольника AOB и равная поэтому

$$0,866 \times AB \quad \text{или} \quad 0,866 \times OB,$$

называется **апофемой** и равна половине EF, тогда как OB есть половина AD

$$EF = 2OE = 0,866 \times 2 \times OB = 0,866 \times CB.$$

Обратным образом:

$$CB = \frac{EF}{0,866} = 1,155\,EF.$$

§ 69. Правильный восьмиугольник.

Тупой угол между двумя сторонами восьмиугольника равен:

$$\frac{n-2}{n} \times 180^\circ,$$

т.-е.

$$\frac{8-2}{8} \times 180^\circ = 135^\circ,$$

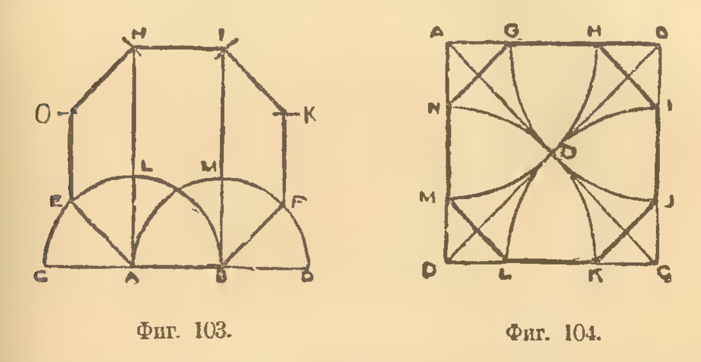
или

$$135^\circ = 90^\circ + 45^\circ = 1\tfrac{1}{2} \text{ прямых угла.}$$

Чтобы вписать восьмиугольник в круг, делят окружность двумя взаимноперпендикулярными диаметрами на 4 равных части, а затем каждый прямой угол еще пополам; это даст все 8 вершин.

Чтобы построить правильный восьмиугольник по данной его стороне (фиг. 103), поступаем следующим образом.

Строим две полуокружности с центрами A и B, затем проводим два перпендикуляра AL и BM. Вершины E и F получаются делением обоих прямых углов LAC и MBD пополам. Затем проводим две вертикальных линии EG и FK и откладываем на них длину стороны. Из точек G и K засекаем продолженные перпендикуляры AL и BM, что даст последние две вершины H и I.



Фиг. 103. Фиг. 104.

Иногда бывает нужно превратить данный квадрат ($ABCD$, фиг. 104) в восьмиугольник ($GHIJKLMN$) отсечением его углов; получается это очень простым построением, а именно засечением сторон квадрата дугами, имеющими радиусами половину диагонали квадрата, а центрами—вершины квадрата.

§ 70. Таблица для деления круга.

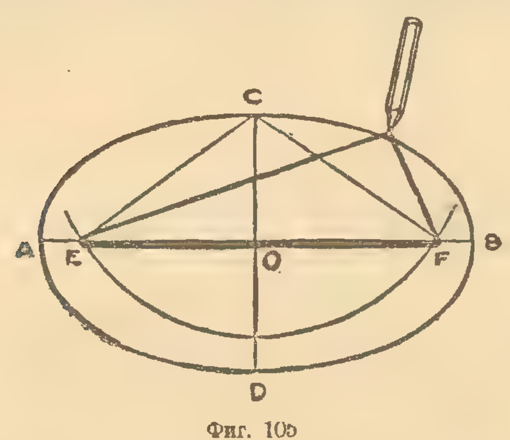
Эта таблица дает длину хорды для круга диаметром в одну единицу длины, напр., в 1 метр, 1 дм., 1 фут, 1 саж. и т. д., в долях этой единицы. Число частей, на которые можно разделить окружность при помощи этой таблицы,—от 3 до 100. Допустим, что круг диаметром в 18 см желают разделить на 10 частей; в таблице против числа 10 стоит 0,3090; это будет длина хорды, охватывающей одну десятую часть окружности для диаметра в 1 см, но так как требуется найти соответствующую хорду для диаметра в 18 см, то надо помножить число 0,3090 таблицы на длину диаметра, т.-е. на 18; это даст 5,562 см. Взяв эту длину циркулем и отложив ее по окружности (последовательными засечениями), мы разделим круг на 10 частей.

Длины хорд для круга с диаметром 1

Число частей.	Длина хорды.	Число частей.	Длина хорды.	Число частей.	Длина хорды	Число частей.	Длина хорды
		26	0,1205	51	0,0616	76	0,0413
		27	0,1161	52	0,0604	77	0,0408
3	0,8660	28	0,1120	53	0,0592	78	0,0403
4	0,7071	29	0,1081	54	0,0581	79	0.0398
5	0,5878	30	0,1045	55	0,0571	80	0.0393
6	0,5000	31	0,1012	56	0,0561	81	0,0338
7	0,4339	32	0,0980	57	0,0551	82	0,0383
8	0,3827	33	0,0951	58	0,0541	83	0,0378
9	0,3420	34	0,0923	59	0,0532	84	0,0374
10	0,3090	35	0.0896	60	0,0523	85	0,0370
11	0,2817	36	0,0872	61	0,0515	86	0,0365
12	0,2588	37	0,0848	62	0,0507	87	0,0361
13	0,2393	38	0,0826	63	0,0499	88	0,0357
14	0,2225	39	0,0805	64	0,0491	89	0,0353
15	0,2079	40	0,0787	65	0.0483	90	0,0349
16	0,1951	41	0,0765	66	0,0476	91	0.0345
17	0,1838	42	0,0747	67	0,0469	92	0,0341
18	0,1736	43	0,0730	68	0.0462	93	0,0338
19	0,1646	44	0,0713	69	0,0455	94	0.0334
20	0,1564	45	0,0698	70	0,0449	95	0,0331
21	0,1490	46	0,0682	71	0,0442	96	0.0327
22	0,1423	47	0,0668	72	0,0436	97	0,0324
23	0,1362	48	0,0654	73	0,0430	98	0,0321
24	0,1305	49	0,0641	74	0,0424	99	0.0317
25	0,1253	50	0,0628	75	0,0419	100	0,0314

§ 71. Эллипс и овал.

Эллипс—фигура, похожая на сплюснутый круг (фиг. 105) и обладающая тем свойством, что сумма расстояний любой из ее точек до двух постоянных точек, называемых **фокусами**, остается неизменной. На этом определении эллипса основано его построение. Пусть оба фокуса эллипса будут E и F (фиг. 105); перекинем через две булавки, воткнутые в эти точки, петлю из тонкого шнура и натянем шнур карандашем, как показано на чер-



Фиг. 105

теже; затем поведем карандашем по бумаге, все время натягивая петлю; в результате у нас получится эллипс, так как сумма длин обоих концов петли не меняется во время передвижения карандаша. Эллипс имеет две **оси** или два **главных диаметра** AB и CD; оба диаметра перпендикулярны друг к другу, и один из них—наибольший, а другой—наименьший из всех прямых линий, проходящих через центр.

AB есть большая ось, а CD—малая ось. Обыкновенно имеют дело с полуосями OB и OC. Большую полуось принято обозначать буквой a, а малую буквой b, так что сами оси будут: $2a$ и $2b$. Расстояние от центра эллипса до каждого из фокусов обозначают буквой c, при чем между этими тремя длинами: a, b, c существует следующая зависимость:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Расстояние $EF = 2c$ называется **фокусным расстоянием**.

Нетрудно, зная оба главных диаметра, вычислить или определить посредством построения фокусное расстояние; дело в том, что c есть величина катета прямоугольного треугольника с гипотенузой a и другим катетом b.

На фиг. 105 показано, как определяется положение обоих фокусов E и F на главной оси AB, когда дана также малая ось CD.

Беря точку C за центр, радиусом, равным большей полуоси, засекают AB в двух точках, которые будут искомыми фокусами эллипса. Действительно, в прямоугольном треугольнике COF гипотенуза $CF=a$, а катет $CO=b$; другой катет будет, следовательно:

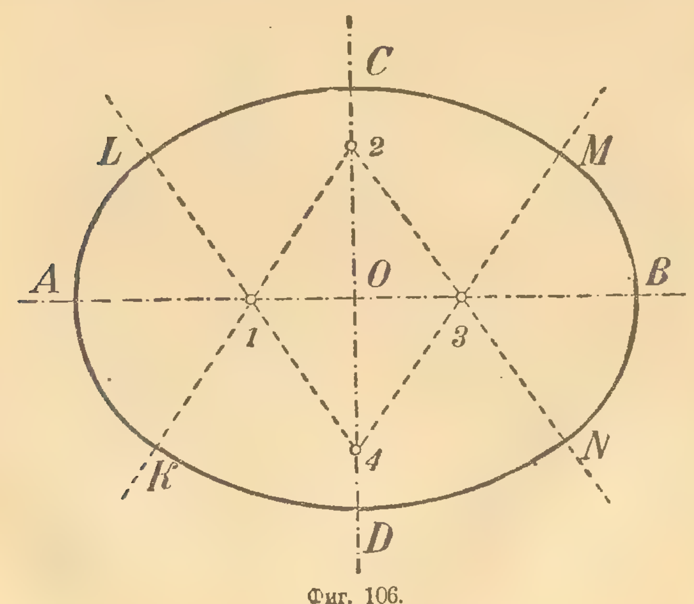
$$OF=\sqrt{a^2-b^2},$$

а это и есть расстояние от центра до фокуса.

Точно так же из прямоугольного треугольника COE:

$$OE=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Следовательно, этим простым построением мы сразу находим оба фокуса и можем построить эллипс, как было объяснено выше.

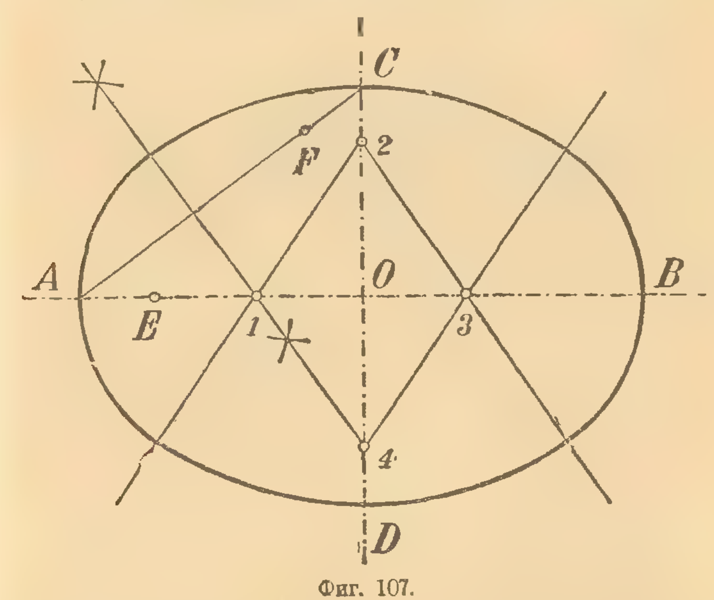


Фиг. 106.

Существуют другие способы построения эллипсов по точкам, но мы о них говорить не будем; посредством циркуля построить эллипс нельзя.

Упомянем еще о построении посредством циркуля фигуры, похожей на эллипс и называемой **овалом** (фиг. 106).

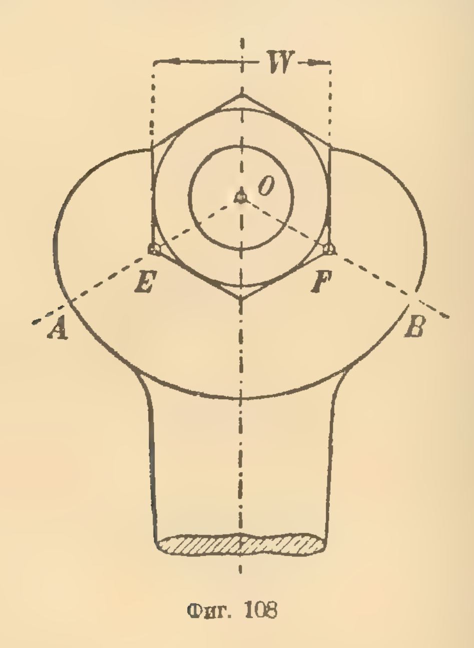
Овал принадлежит к числу кривых линий, носящих общее название **коробовых**. Овал представляет из себя замкнутую кривую, состоящую из четырех сопряженных дуг окружностей, описанных двумя различными радиусами из четырех центров. Чтобы



Фиг. 107.

построить овал произвольного размера, надо взять произвольный ромб и продолжить у двух противоположных вершин все четыре его стороны; тогда четыре вершины ромба будут служить четырьмя центрами тех четырех дуг, из которых состоит овал, а продолжения сторон ромба будут служить границами, на которых сходятся эти четыре дуги. Взяв произвольный радиус, описываем из центра 1 дугу KL; тогда из центров 2 и 4 придется радиусами, равными $K2$ и $L4$, провести дуги LM и KN; наконец, последняя дуга MN, описанная из центра 3 тем же радиусом, как и первая, замкнет весь овал. В виду сходства овала с эллипсом расстояния AB и CD называют **осями** овала и обозначают через $2a$ и $2b$; центры 1 и 3 называются **фокусами** овала.

По данным осям $2a$ и $2b$ овал можно построить следующим образом. Строим оси овала $AB=2a$ и $CD=2b$ и, соединив A с C, откладываем $OE=OC$; на линии AC от точки C откладываем до точки F найденную разность AE $(=a-b)$; отрезок AF делим пополам и восставляем из середины перпендикуляр, который: 1) в пересечении с осями даст нам два центра 1 и 4; 2) укажет границу, где происходит сопряжение дуг, описанных из этих двух центров. Отыскиваем остальные два центра, откладывая их расстояния от центра овала O, и, проведя через центры три границы дуг, строим две остальные дуги. Овал, удовлетворяющий требованиям задачи, построен.



Фиг. 108

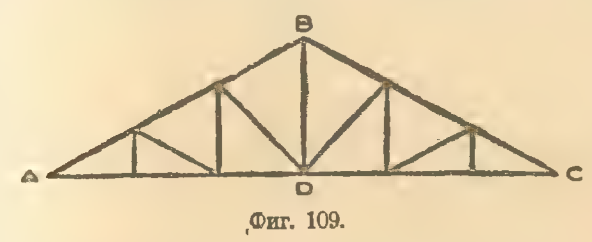
Пример. Построение коробовой кривой, т.-е. составленной из сопряженных дуг окружностей, часто встречается в технике. Примером может служить построение головки гаечного ключа. Для болта, имеющего диаметр D, строим головку в виде правильного шестиугольника (см. задачу № 126). Сторона шестиугольника равна диаметру болта D. Из центра шестиугольника через две вершины проводим две линии OA и OB, которые будут служить границами сопряженных дуг. Из вершины E и F, как из цен-

тров, описываем дуги радиусом, равным стороне шестиугольника D. Из центра O описываем дугу радиусом $2D$. Три построенные дуги сбразуют кривую, ограничивающую головку ключа.

Задачи

116. Начертите треугольник со сторонами в 8, 10 и 14 см и измерьте транспортиром его три угла.

117. Без помощи транспортира постройте все три угла предыдущего треугольника так, чтобы они имели одну общую вершину и прилегали бы друг к другу одной стороной (фиг. 91, а также § 55). Убедитесь, что сумма всех трех углов составляет два прямых.



Фиг. 109.

118. Стропильная ферма (фиг. 109) имеет ноги AB и CB по 8 метров, пролет AC—в 14 метр. Определите высоту фермы BD.

119. У стального стержня, диаметром в 50 мм, желают отфрезеровать один конец так, чтобы получить квадрат; какая наибольшая возможная сторона этого квадрата?

120. Определите диаметр круга, описанного вокруг квадрата со стороною в 32 мм.

121. Постройте пятиконечную звезду в круге с диаметром в 10 см.

122. Определите диаметр круга, вписанного в правильный шестиугольник со стороною в 3 см.



Фиг. 110.

123. Дан кусок квадратной стали со стороной в 8 см; из него, срезав четыре угла, как было объяснено в § 69 (фиг. 104), желают приготовить правильный восьмиугольный брус. Вычислите длину стороны этого восьмиугольника.

124. Постройте овал с большою осью в 10 см, а малою в 6 см.

125. Постройте пятиугольник, шестиугольник и восьмиугольник, у каждого из которых стороны равны 4 см.

126. По способу проф. Баха гайка (или головка) болта строится так: из центра сечения болта радиусом, равным диаметру болта D, описывают окружность и в нее вписывают правильный шестиугольник (фиг. 110).

Размер W называется отверстием ключа.

Выразить W через диаметр болта D.

Сравнить полученную формулу с формулой, приведенной на стр. 8,

$$W = 1{,}5\ D + 3\ \text{мм}.$$

Найти, при каком значении D эти две формулы дают одинаковые значения для W.

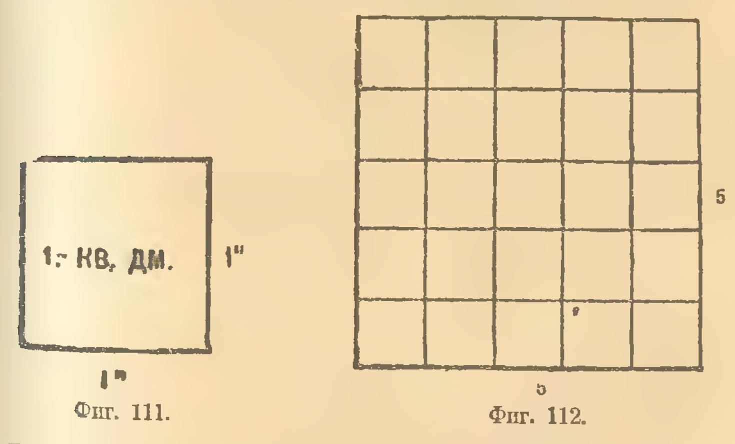
ГЛАВА XII.

Площади геометрических фигур.

§ 72. Площади квадратов и прямоугольников.

Способ вычисления площадей квадратов и прямоугольников настолько хорошо всем известен. что о нем не стоит много говорить.

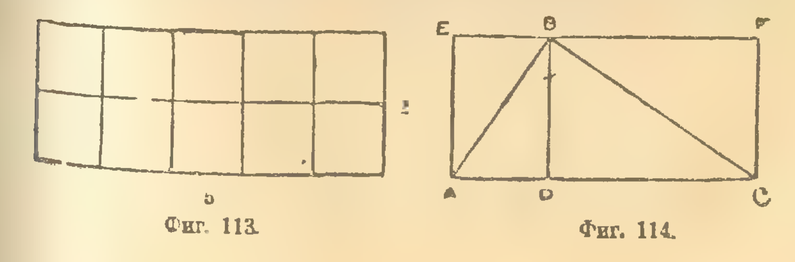
За единицу площади принимают квадрат, сторона которого равна единице длины, напр., 1 метр, 1 дм., 1 фут, 1 арш., 1 саж. и т. д. На фиг. 111, напр., показан 1 квадратный дюйм.



Фиг. 111.

Фиг. 112.

Если квадрат имеет сторону в несколько единиц длины, то его площадь равна квадрату этого числа. На фиг. 112 показан квадрат со стороною в 5 см; его площадь поэтому будет $5^2 = 25$ кв. см.



Фиг. 113.

Фиг. 114.

Площадь прямоугольника определяется произведением его сторон; так, на фиг. 113 показан прямоугольник со сторонами в 5 и 2 метра; его площадь будет: $5 \times 2 = 10$ кв.м.

§ 73. Площади треугольников.

Легко убедиться в том, что площадь треугольника равна половине площади прямоугольника, имеющего одной стороною основание треугольника, а другою — высоту треугольника. На фиг. 114 треугольник ABC с основанием AC и с высотою BD дополнен слева треугольником ABE, а справа треугольником BCF, при чем образован прямоугольник $ACFE$ с основанием AC и с другою стороною, равною высоте BD.

В этом случае

площадь ABD = площади ABE

и площадь BCD = площади BCF;

следовательно, площадь $ABC = \frac{1}{2}$ площади $ACFE$,

а так как площадь $ACFE = AC \times BD$,

то площадь $ABC = \frac{1}{2} AC \times BD$

Итак, площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

Для равностороннего треугольника со стороною s и с высотою $h = 0{,}866\,s$ площадь будет:

$$A = \frac{1}{2} \times 0{,}866\,s \times s = 0{,}433\,s^2.$$

Иногда приходится определить площадь треугольника со сторонами a, b, c, высота которого не дана. Назовем через $2p$ периметр этого треугольника, т.-е. положим:

$$a + b + c = 2p.$$

Тогда площадь треугольника вычисляется по формуле:

$$A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Пример. Определить площадь треугольника со сторонами в 12, 10 и 6 см. Положим:

$$12 + 10 + 6 = 2p;$$

следовательно:

$$p = 14;$$

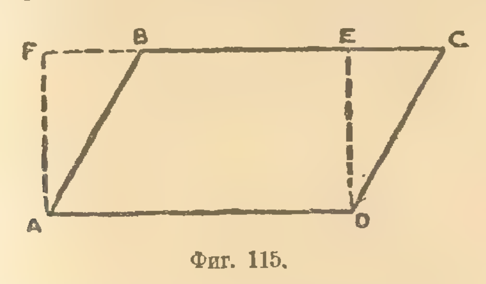
$$p - a = 14 - 12 = 2;\ p - b = 14 - 10 = 4;\ p - c = 14 - 6 = 8;$$

$$A = \sqrt{14 \times 2 \times 4 \times 8} = \sqrt{896} = 29{,}93 \text{ кв. см.}$$

§ 74. Площадь параллелограма.

Нетрудно видеть, что площадь параллелограма равна площади прямоугольника с тем же основанием и с той же высотою (фиг. 115).

Отняв от параллелограма $ABCD$ треугольник EDC и при-



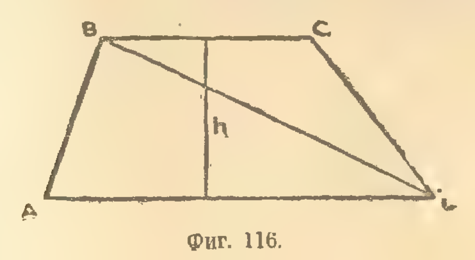
Фиг. 115.

ставив его слева на место, обозначенное FAB, мы получим равновеликий прямоугольник $FADE$: поэтому:

$$\text{площадь } ABCD = AD \times DE.$$

§ 75. Площадь трапеции.

Разделим трапецию $ABCD$ (фиг. 116) диагональю BD на два треугольника. Высота обоих треугольников равна высоте



Фиг. 116.

трапеции h; основаниями же служат соответственно верхняя и нижняя стороны трапеции. Мы, очевидно, будем иметь

площадь треугольника $BDC = \frac{1}{2} BC \times h$;

площадь треугольника $BAD = \frac{1}{2} AD \times h$;

площадь трапеции $ABCD = \frac{1}{2} BC \times h + \frac{1}{2} AD \times h$
$= \frac{1}{2}(BC + AD)\, h$.

Если назвать верхнюю сторону b', а основание b, то

$$A = \frac{b + b'}{2} h,$$

т. е. площадь трапеции равна произведению полусуммы параллельных сторон на высоту или произведению половины высоты на сумму параллельных сторон.

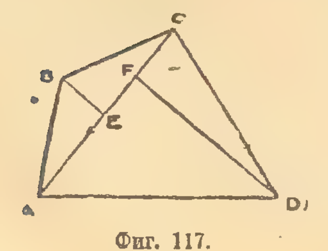
Пример. Площадь трапеции высотою в 3 метра с параллельными сторонами 12 и $8\frac{1}{2}$ метров будет:

$$A = \frac{1}{2}\,(12 + 8\tfrac{1}{2}) \times 3 = 10\tfrac{1}{4} \times 3 = 30\tfrac{3}{4} \text{ кв. м.}$$

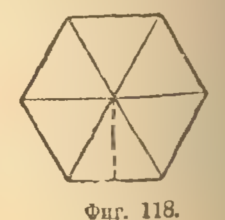
§ 76. Площадь неправильного четыреугольника.

На фиг. 117 показан неправильный четыреугольник с произвольными сторонами и углами. Площадь определяется делением его на два треугольника посредством диагонали AC и измерением как этой диагонали, так и высот BE и DF обоих треугольников ABC и ADC.

$$\text{Площадь } ABCD = \frac{AC \times BE}{2} + \frac{AC \times FD}{2} = \frac{AC(BE + FD)}{2}.$$



Фиг. 117.



Фиг. 118.

§ 77. Площадь правильного шестиугольника.

Разложите шестиугольник, показанный на фиг. 118, на шесть равносторонних треугольников со стороною a и высотою h, равною, как известно, $0{,}866\,a$. Площадь каждого из треугольников равна $0{,}433\,a^2$, а поэтому площадь шестиугольника будет в шесть раз больше, или $2{,}598\,a^2$.

Определим эту площадь не по стороне шестиугольника, а по диаметру вписаннаго в него круга; назовем его d.

Мы знаем, что:

$$h = \frac{d}{2} = 0{,}866\,a;$$

откуда $$a = 0{,}577\,d,$$

и, возвышая в квадрат: $$a^2 = 0{,}333\,d^2 = \tfrac{1}{3}\,d^2.$$

Подставив это выражение в формулу площади шестиугольника

$$A = 2{,}598\,a^2,$$

получим: $$A = 0{,}866\,d^2.$$

§ 78. Площади различных правильных многоугольников.

Если известна сторона a правильного многоугольника, то его площадь A может быть выражена умножением квадрата стороны на некоторое определенное число, называемое **постоянною** данного многоугольника. Назовем эту постоянную c, тогда:

$$A = ca^2.$$

Для шестиугольника мы только что определили, что:

$$A = 2{,}598\,a^2,$$

следовательно, $$c = 2{,}598.$$

Для квадрата, очевидно,

$$A = a^2;$$

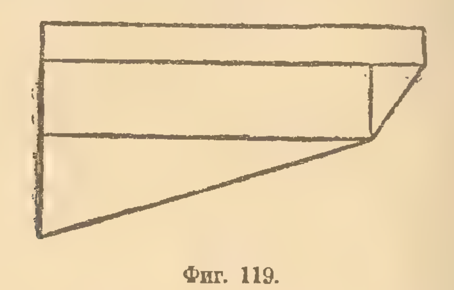
следовательно, $$c = 1.$$

Для других правильных многоугольников эти постоянные даны в следующей таблице:

Число сторон.	Постоянная.	Число сторон.	Постоянная.
3	0,433	8	4,828
4	1,000	9	6,182
5	1,721	10	7,694
6	2,598	11	9,366
7	3,634	12	11,196

§ 79. Площадь неправильного многоугольника.

Для определения площади любого многоугольника ее делят на ряд треугольников или прямоугольников и затем определяют площадь каждой части в отдельности. Пример части показан на фиг. 119.



Фиг. 119.

§ 80. Площади подобных фигур.

В технике постоянно требуется с той или иною целью изобра ить на чертеже деталь машины или часть механизма. Только в редких случаях возможно нарисовать требуемый предмет в натуральную величину. Обыкновенно приходится изображать в уменьшенном размере и реже в увеличенном. Про чертеж в уменьшенном размере говорят, что он изображает предмет в определенную долю натуральной величины, напр., изображение в $^1/_{10}$ натуральной величины получается, когда все линейные размеры на рисунке в 10 раз меньше соответствующих натуральных величин.

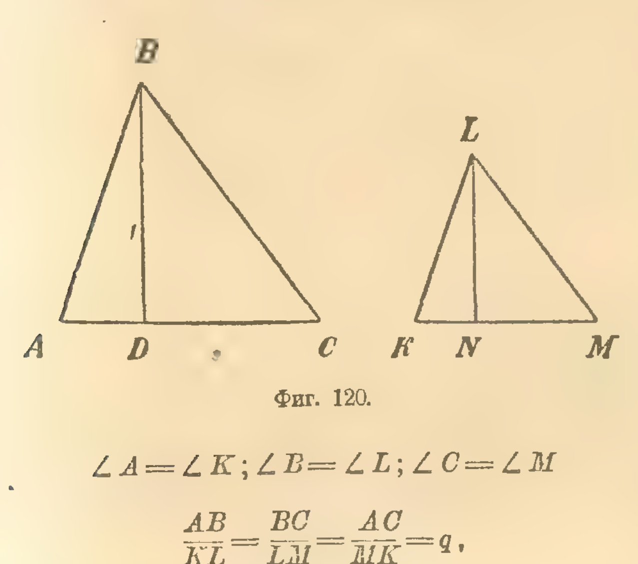
Все геометрические фигуры и контуры, которые на чертеже изображены в уменьшенном размере, сохраняют свою форму и

только изменяют линейные размеры; так, круг остается кругом, прямоугольник—прямоугольником и т. д. Поэтому геометрическая фигура и ее изображение в уменьшенном размере называются „подобными фигурами". Так как всякая прямолинейная фигура может быть разбита на треугольники, то свойства подобных фигур достаточно выяснить на подобных треугольниках

Если мы построим по трем данным сторонам (см. задачу 116) какой-нибудь треугольник и затем его же изобразим в уменьшенном размере, уменьшив каждую сторону в одно и то же число раз, то получим два подобных треугольника. Если теперь вырежем углы этих треугольников и сравним их друг с другом попарно, то убедимся, что углы подобных треугольников попарно равны между собою. Отсюда мы получаем следующие свойства подобных треугольников:

1. Углы подобных треугольников соответственно равны между собою.

2. Стороны, лежащие против равных углов, пропорциональны, т.-е. для треугольников, изображенных на фиг. 120, имеем:



Фиг. 120.

$$\angle A = \angle K; \angle B = \angle L; \angle C = \angle M$$

$$\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LM} = \frac{AC}{MK} = q,$$

где буквою q обозначено отношение между сторонами двух подобных треугольников которое для всех трех пар сторон остается одинаковым

Легко увидать, что отношение высот подобных треугольников равно отношению их сторон, поэтому найдем:

$$\frac{BD}{LN} = q.$$

Отсюда просто найти отношение площадей двух подобных треугольников:

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } KLM} = \frac{AC.BD}{KM.LN} = q^2,$$

т.-е. отношение площадей двух подобных фигур равно квадрату отношения их линейных размеров.

§ 81. Площадь круга.

Для определения площади круга мы множим квадрат его диаметра на число 0,7854 или же квадрат его радиуса на число 3,1416, которое сокращенно обозначается греческою буквою π (читается пи). В виде формул это обозначается так:

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \pi R^2.$$

Так как окружность круга равна диаметру, умноженному на то же самое число π, т.-е.

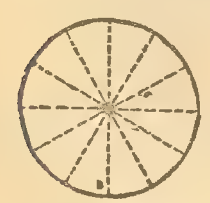
$$C = \pi D = 2 \pi R,$$

то очевидно, что

$$A = C \times \frac{D}{4} = C \times \frac{R}{2}$$

Эта последняя формула может быть получена на основании следующих соображений (фиг. 121)

Разделим круг на большое число частей, как показано на фиг. 121. Каждая часть





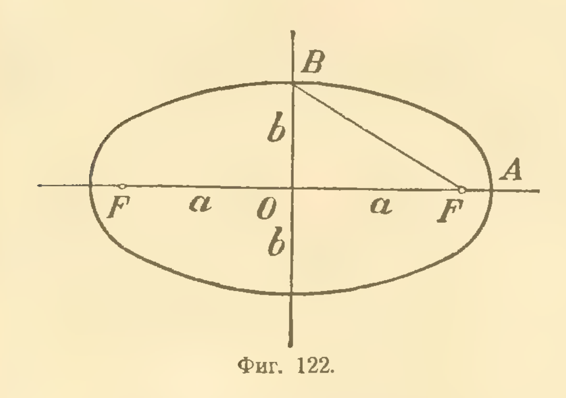
Фиг. 121.

напоминает собою треугольник, и площадь ее тем меньше отличается от площади треугольника, чем больше взято частей. Соединим все части так, чтобы основания лежали на одной линии.

Общая высота частей равна радиусу; сумма всех оснований равна **выпрямленной** окружности. Так как в отдельности каждая часть имеет площадью произведение основания на половину высоты, то, следовательно, сумма всех этих площадей, дающая площадь круга, будет равна окружности круга, умноженной на половину радиуса:

$$A = C \times \frac{R}{2};$$

но окружность круга $C = 2\pi R;$
следовательно $A = \pi R^2,$
а так как $R = \frac{1}{2} D,$
то $A = \frac{\pi}{4} D^2 = 0{,}7854\, D^2.$



Фиг. 122.

§ 82. Площадь эллипса.

Эллипс является сплюснутым кругом и его площадь равна площади круга, у которого диаметр **среднее геометрическое** обеих осей эллипса, или радиус круга есть среднее геометрическое обеих полуосей эллипса. Если мы назовем большую полуось через a, а малую—через b (фиг. 122), то радиус равновеликого по площади круга будет:

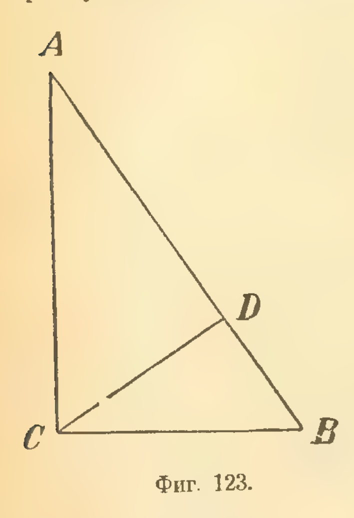
$$R = \sqrt{ab},$$

поэтому $R^2 = ab.$

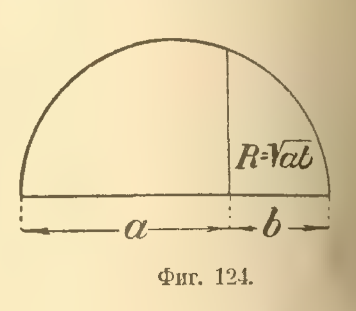
Так как площадь круга равна квадрату радиуса, помноженному на число π, то площадь эллипса будет:

$$A = \pi ab = 3{,}1416\, ab.$$

Радиус круга равновеликого по площади данному эллипсу можно найти геометрическим построением, пользуясь свойствами прямоугольного треугольника. В этом треугольнике: 1) перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен среднему геометрическому между двумя отрезками гипотенузы, на которые она разбивается

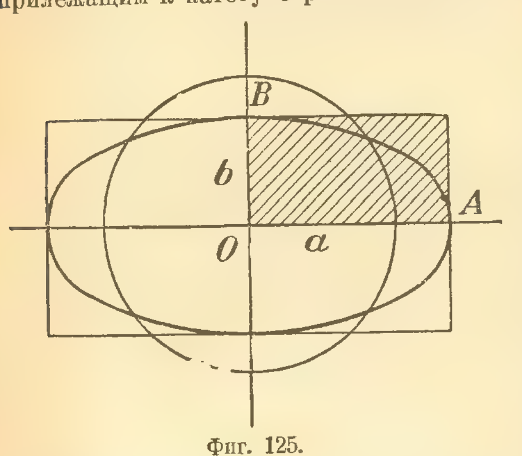


Фиг. 123.



Фиг. 124.

основанием перпендикуляра, т.-е. $CD^2 = AD \times DB$; 2) каждый из катетов есть среднее геометрическое между всей гипотенузой и прилежащим к катету отрезком гипотенузы, т.-е. $CB^2 = AB \times BD$ и $AC^2 = AB \times AD$. Чтобы найти радиус равновеликого круга, строим (фиг. 124) на сумме полуосей $(a+b)$ полуокружность и, восставив в точке соприкосновения a с b перпендикуляр, находим его длину до пересечения с окружностью; полученный отрезок и даст искомый радиус. На фиг. 125 построен эллипс и равновеликий ему круг. Заштрихованный прямоугольник дает площадь ab, которую надо взять π раз, чтобы получить площадь эллипса.



Фиг. 125.

§ 83. Площадь круговoго сектора.

Круговой сектор показан на фиг. 126; его площадь составляет часть полной площади круга в отношении длины его дуги к полной окружности. Допустим, что дуга сектора имеет 45°; так как окружность имеет 360°, то площадь этого сектора будет:

$$\frac{45}{360} = \frac{1}{8} \text{ площади круга.}$$

Если радиус круга и длина дуги сектора известны, то площадь сектора получается умножением длины дуги на $\frac{1}{2}$ радиуса. Доказывается это подобно тому, как доказывается, что площадь круга равна произведению длины окружности на половину радиуса, а именно: разделением площади на множество мелких треугольников (§ 81). Высота всех этих треугольников равна радиусу, а сумма всех оснований равна дуге сектора. Так как площадь каждого треугольника равна произведению его основания, т.-е. части дуги, на половину высоты, т.-е. на $\frac{1}{2}$ радиуса, то, следовательно, площадь сектора A будет равна его дуге a, помноженной на половину общей высоты R.

$$A = \frac{1}{2} a R.$$

Допустим, что дуга сектора дана в градусах, а не по длине. Назовем неизвестную длину дуги через a, как и раньше, а число градусов дуги сектора через $n°$. Нам известно, что длина полной окружности есть $2\pi R$, а соответствующее число градусов—360°.

Следовательно: $a : 2\pi R = n° : 360°$;

откуда

$$a = \frac{2\pi R n}{360}.$$

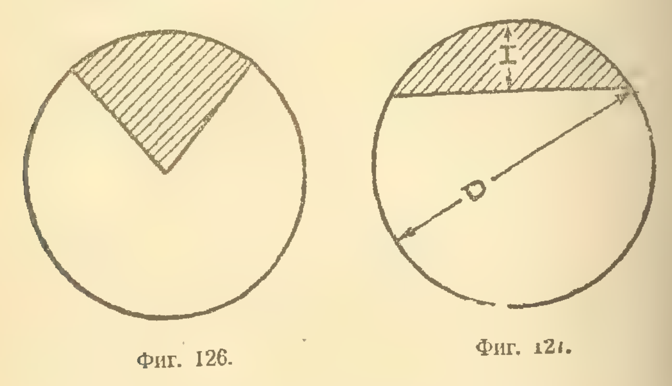
Подставив это выражение для a в формулу для площади сектора A, получим:

$$A = \frac{1}{2} \frac{2\pi R n}{360} R,$$

или

$$A = \pi R^2 \times \frac{n}{360}.$$

Это показывает, как было сказано в самом начале, что площадь сектора составляет часть полной площади круга πR^2 в отношении его дуги $n°$ к полной окружности 360°.



Фиг. 126. Фиг. 127.

§ 84. Площадь кругового сегмента.

Круговой сегмент показан на фиг. 127. Он представляет собою верхнюю (кривую) часть кругового сектора. Если определить вычислением площадь всего сектора, имеющего такую же дугу, как и данный сегмент, а затем вычесть площадь излишнего треугольника, которую можно легко получить из чертежа (измерением), то разность даст площадь сегмента.

В геометрии не существует точной и простой формулы для определения площади кругового сегмента, но имеется несколько приближенных формул, одна из которых будет:

$$A=\frac{4}{3}H^2\sqrt{\frac{D}{H}-0{,}608}.$$

Пример. Горизонтальный цилиндрический резервуар длиною 7 метров и диаметром 2 метра наполнен нефтью на глубину 0,6 метра. Определить, сколько имеется в резервуаре ведер нефти (1 ведро = 12,3 литра).

Сначала определим площадь сегмента, соответствующего части резервуара с нефтью. Мы имеем:

$$D=2 \text{ м.} \quad \text{и} \quad H=0{,}6 \text{ м.}$$

Подставив эти значения в формулу площади сегмента, мы получим:

$$A = \frac{4}{3} \times 0{,}6^2 \sqrt{\frac{2}{0{,}6} - 0{,}608};$$

$$A = \frac{4}{3} \times 0{,}36 \sqrt{2{,}725} = 0{,}48 \times 1{,}651 = 0{,}792 \text{ кв. м.}$$

Но так как резервуар имеет 7 метров длины, то, следовательно, объем нефти будет:

$$0{,}792 \times 7 = 5{,}544 \text{ кб. метра} = 5544 \text{ литра.}$$

А зная, что 1 ведро = 12,3 литра, получим:

$$\frac{5544}{12{,}3} = 451 \text{ ведро.}$$

Иногда диаметр круга не дан, но за то дана длина хорды сегмента c и его высота H; тогда, чтобы воспользоваться предыдущей формулой, надо предварительно вычислить соответствующий диаметр по формуле:

$$D = \frac{c^2}{4\,H} + H.$$

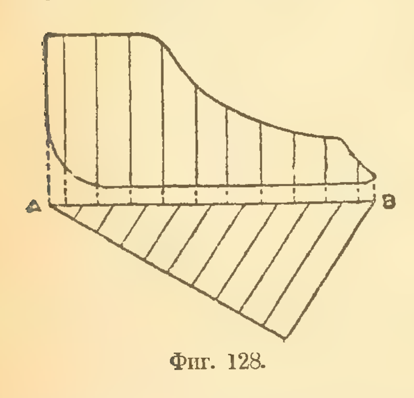
Чтобы проверить применимость формулы для вычисления площади сегмента, начертите на миллиметровой бумаге сегмент, упоминаемый в данном примере, в $^1/_{10}$ натуральной величины и найдите его площадь, сосчитав число кв. мм., расположенных внутри сегмента. Сравните полученный результат с вычисленной по формуле площадью.

§ 85. Площади неправильных фигур.

Когда фигуру нельзя точно разделить на простые геометрические фигуры, то надо придумать какие-нибудь другие способы для определения ее площади.

Можно, напр., вырезать фигуру из бумаги, картона или жести и, взвесив ее, сравнить с весом 1 кв. см., вырезанного из того же материала.

Можно также поступить так, как показано на фиг. 128. Допустим, нам нужно определить площадь индикаторной диаграммы паровой машины. Проводим произвольную прямую AB под диаграммой и из обоих концов измеряемой фигуры опускаем перпендикуляры, дающие точки A и B. Затем делим расстояние AB на некоторое произвольное число частей, напр., на 10, и из середины каждой части восставляем перпендикуляры. Измеряем длину отрезков этих перпендикуляров (их здесь 10) в промежутке между верхней и нижней линией диаграммы; затем складываем все эти длины и делим сумму на число частей, т.-е. в нашем примере на 10. У нас, таким образом получится как-бы средняя высота фигуры; и площадь определится умножением этой средней высоты на длину AB, взятую за основание.

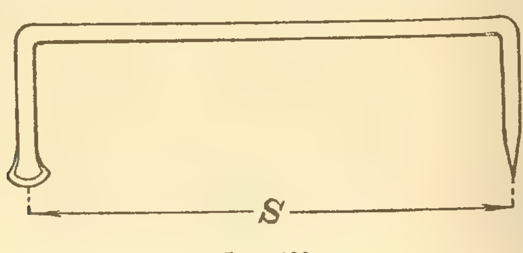


Фиг. 128.

§ 86. Планиметр.

Это — инструмент, служащий для механического определения площадей фигур.

Самым простым по устройству является планиметр Притца (фиг. 129); его легко всякий сделает себе сам.

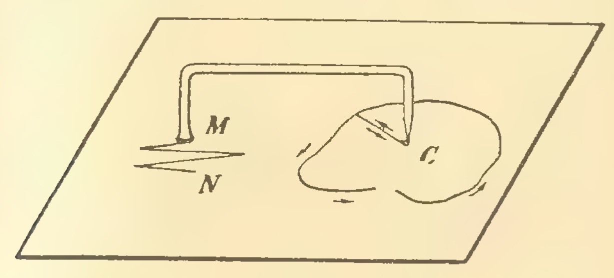


Фиг. 129.

Этот планиметр представляет из себя растянутую букву П, сделанную из стальной проволоки. На одном конце имеется закругленное острие, а на другом проволока разбита в пластинку, имеющую на конце форму лезвия сечки. Лезвие должно быть

чуть остро настолько, чтобы слегка прорезать бумагу. Плоскость лезвия должна проходить через острие.

Расстояние самой нижней точки лезвия от острия представляет из себя „постоянную" величину прибора и должно быть известно. Пусть оно равно S миллиметров. Выгодно сделать это расстояние равным круглому числу миллиметров, напр. 100 или 200. Чтобы найти площадь, заключенную внутри замкнутой кривой линии, находим на-глаз центр тяжести измеряемой фигуры; пусть это будет точка C (фиг. 130). Соединим прямою



Фиг. 130.

линией эту точку с какой-нибудь точкой контура A[1]). Затем помещаем острие планиметра в точку C, а лезвие вне площади в произвольную точку M, и его положение отмечаем на бумаге, нажимая лезвие.

Удерживая левой рукой ножку планиметра с лезвием, правой рукой берем острие и проводим его сперва по прямой CA. далее обводим весь контур и, придя в точку A, опять по прямой AC возвращаемся в исходную точку C. При таком действии лезвие совершит сложное движение, начертив на бумаге фигуру вроде буквы М, и займет в конце концов положение N, которое подобно положению M, отмечаем на бумаге нажимом лезвия. В результате этих двух отметок мы будем иметь на бумаге две резких черточки M и N; измеряем их расстояние в миллиметрах. Произведение этого расстояния MN на постоянную прибора S и даст искомую площадь A,

т. - е.

$$A = S \times MN \text{ кв. мм.}$$

[1]) Буква A, пропущенная на фиг. 130 должна стоять в том месте, где прямая линия, проведенная из C, встречает криволинейный контур.

В большинстве случаев будет трудно найти центр тяжести фигуры; тогда, для достижения бо̀льшей точности, поступают одним из следующих способов: 1) продолжают прямую AC до противоположной части фигуры и повторяют измерение, ведя острие от точки C по вновь проведенной прямой и обводя контур в обратном направлении, нежели в первый раз. 2) Повторяют измерение при различных установках планиметра несколько раз. 3) Обводят контур несколько раз под-ряд, напр., 10, и получают удесятеренную площадь, откуда получают искомый результат. Если площадь достаточно велика, так что одно из ее измерений больше половины постоянной прибора, то надо площадь разбить на ряд небольших площадей и производить измерение каждой в отдельности.

Сделайте себе планиметр и проверьте его действие на измерении фигур, площади которых вы можете вычислить геометрическим путем, наприм., круга или эллипса.

Измерьте планиметром площадь фигуры, изображенной на рис. 128, и сравните результат измерения с числом, полученным в задаче № 135.

Задачи.

127. Определите площадь равностороннего треугольника со стороною 9 см.

128. Определите сторону квадрата площади, одинаковой с площадью круга диаметром 20 мм.

129. Круг имеет диаметр в 20 см. Найдите большую ось равновеликого по площади эллипса с малой осью 15 см.

130. Определите площадь треугольника со сторонами 20, 22 и 24 метра.

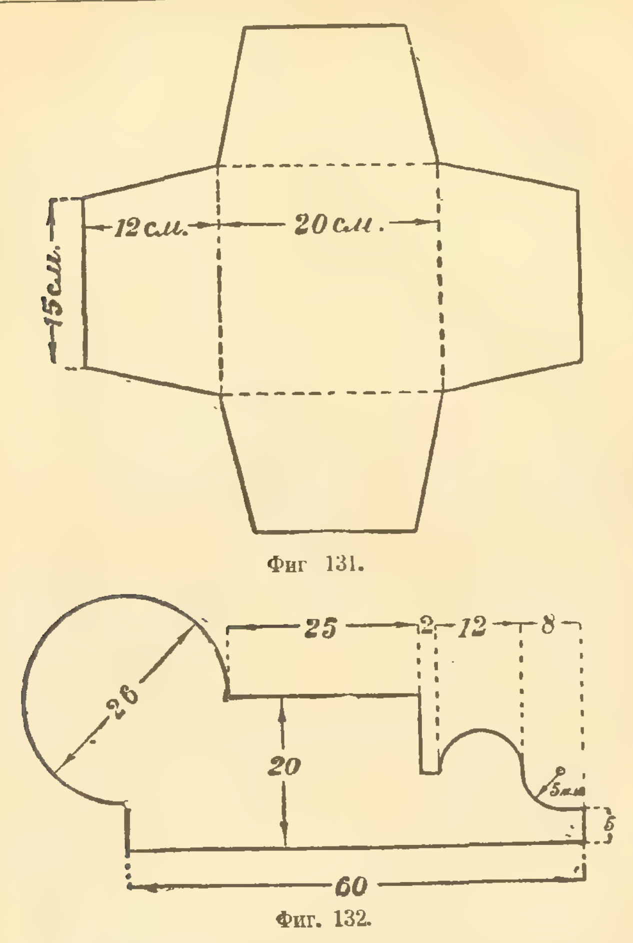
131. Определите площадь фиг. 131.

132. Определите площадь сечения, изображенного на фиг. 132.

133. Определите площадь правильного шестиугольника с расстоянием между противоположными сторонами в 20 мм.

134. Если из квадратного листа железа со стороною 1,2 метра вырезать четыре круга диаметром 0,6 м., то сколько будет потерянного материала в процентах?

135. Определите площадь фигуры 128, применяя способ описанный в § 85.



Фиг 131.

Фиг. 132.

136. Горизонтальный цилиндрический котел длиною в 5 м. и с диаметром 1,5 м. наполнен до глубины в 1 метр водою. Определить объем парового пространства, остающегося над поверхностью воды.

137. Начертить треугольник, упоминаемый в задаче № 130. в $^1/_{200}$ натуральной величины.

138. Начертить две подобных трапеции, у которых площадь одной в 16 раз больше площади другой.

139. Найдите, в какую долю натуральной величины изображены: а) прямоугольный треугольник на фиг. 34; б) ферма на фиг. 109; г) вкладыш на фиг. 158.

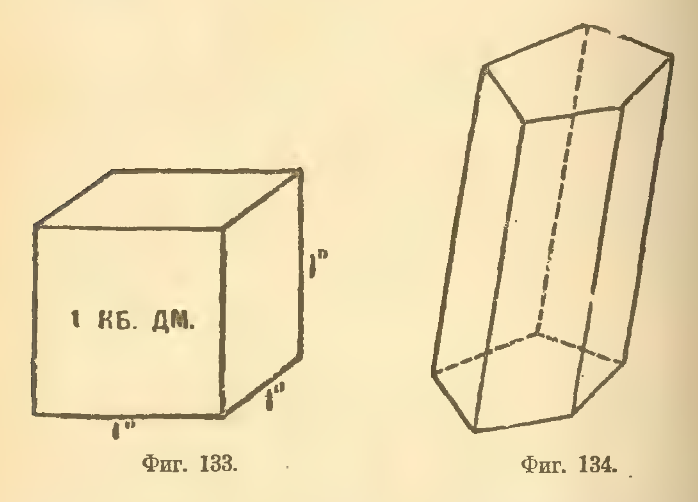
140. Постройте фигуру, подобную изображенной на фиг. 132. в $\frac{1}{2}$ натуральной величины.

ГЛАВА XIII.

Объемы и поверхности тел.

§ 87. Призма.

При измерении объемов единицею служит куб со стороною равною единице длины: метр, дюйм, фут, сажень и т. д. Один куб. дм. показан на фиг. 133.



Фиг. 133. Фиг. 134.

Призмою называется тело (фиг. 134), имеющее два параллельных и равных основания (верхнее и нижнее) и боковые грани, являющиеся параллелограмами.

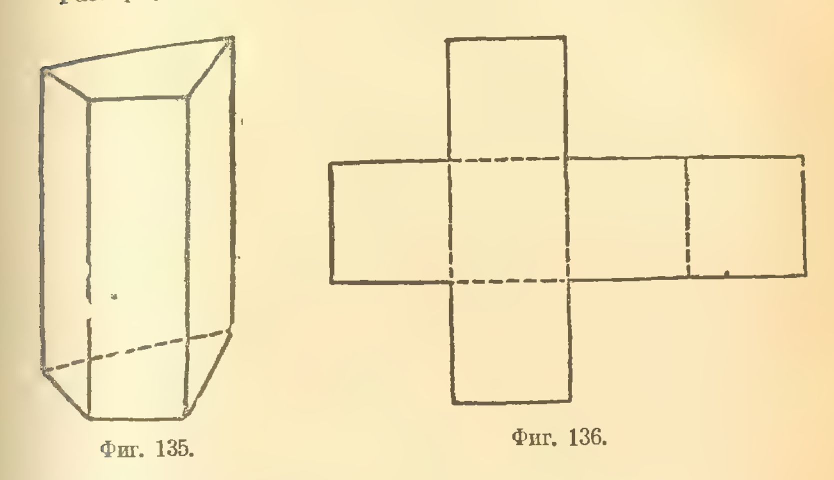
Прямою призмою (фиг. 135) называется призма с гранями, а следовательно, и боковыми ребрами, перпендикулярными к основаниям. Все боковые грани поэтому — прямоугольники.

Кубом называется прямая призма с шестью равными квадратными гранями: 4 боковых и 2 основания.

Полная поверхность куба с ребром e будет:

$$S = 6e^2.$$

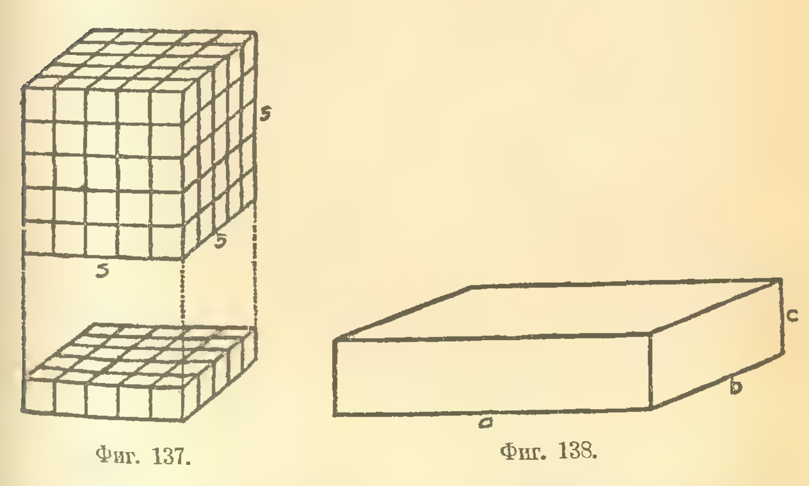
Развернутая поверхность куба показана на фиг. 136.



Фиг. 135. Фиг. 136.

Объем куба со стороною e будет:

$$V = e^3.$$



Фиг. 137. Фиг. 138.

На фиг. 137 показан куб со стороною 5 см. На чертеже видно, как он составлен из 125 кубов в 1 куб. см. каждый.

Прямоугольная призма показана на фиг. 138; это прямая призма с прямоугольными основаниями. Называя ребра прямоугольной призмы через a, b, c, будем иметь для полной поверхности призмы:

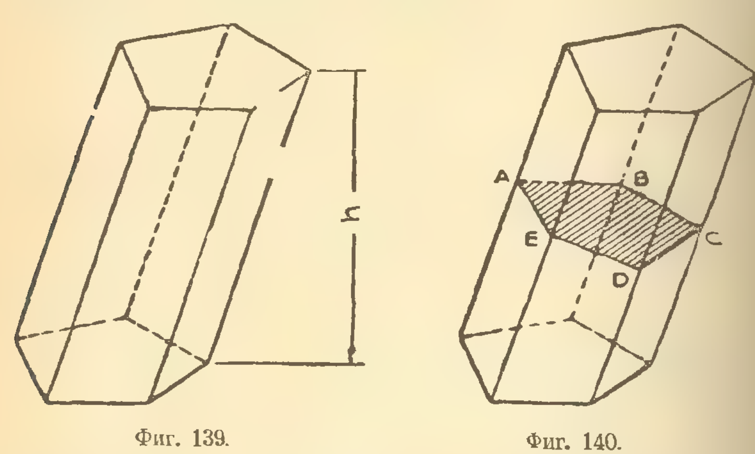
$$S = 2ab + 2ac + 2bc,$$

а для объема ее:

$$V = abc.$$

Наклонною призмою (фиг. 139) называется призма с наклонными ребрами. Высотою наклонной призмы называется расстояние h между обоими основаниями.

Прямым сечением наклонной призмы называется сечение, перпендикулярное к ребрам или к граням; оно изображено в виде многоугольника $ABCDE$ на фиг. 140.



Фиг. 139. Фиг. 140.

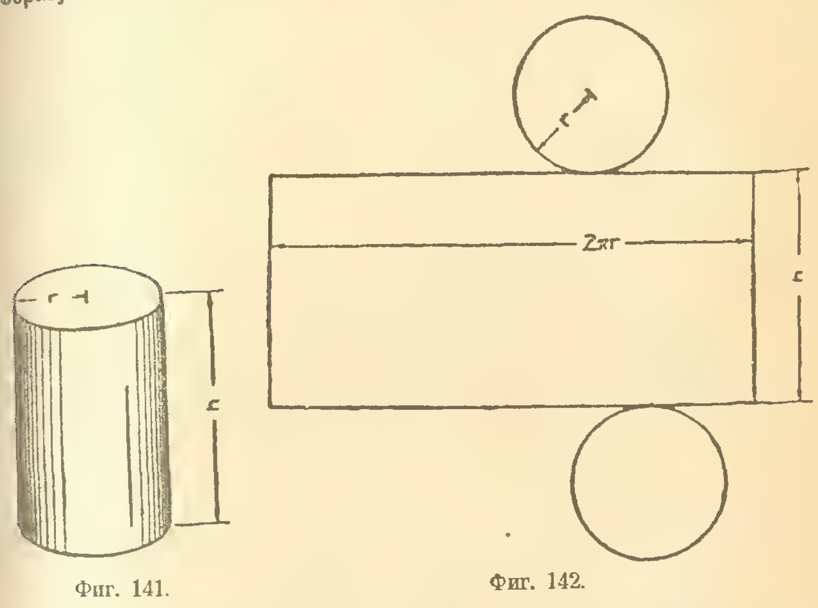
Объем наклонной призмы равен или произведению площади основания на высоту, или произведению площади прямого сечения на ребро.

Оба выражения дают одинаковые результаты; на практике пользуются тем из них, который для данного случая представляется более удобным.

§ 88. Цилиндр.

Цилиндр отличается от призмы тем, что его основания ограничены кривыми, а не ломаными линиями. Обыкновенно, когда говорят: цилиндр,—подразумевают: прямой цилиндр с круглыми

основаниями (фиг. 141); но вообще говоря, это необязательно. Можно рассматривать цилиндр, как призму с бесчисленным множеством мельчайших граней; ребра этих граней носят название **образующих цилиндра.**



Фиг. 141. Фиг. 142.

Боковая поверхность цилиндра (фиг. 141), с радиусом r и высотою h, равна окружности основания, помноженной на высоту, т.-е. $2\pi rh$. Полная поверхность равна боковой плюс площади обоих оснований, т.-е.

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Вводя вместо r диаметр d, получим:

$$S = \pi d h + \frac{\pi d^2}{2}.$$

Объем цилиндра равен площади основания, умноженной на высоту, т.-е.

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi d^2 h}{4} = 0{,}7854\ d^2 h.$$

Развернутый цилиндр показан на фиг. 142.

§ 89. Движение жидкостей и газов в трубах.

Зная площадь сечения трубы A и скорость V течения жидкости или газа в трубе, можно найти объем Q жидкости или газа, протекающий в единицу времени:

$$Q = V.\ A.$$

Пример. Сколько ведер воды протекает в минуту через трубу диаметром 10 см., при скорости 90 метров в мин.? Имеем:

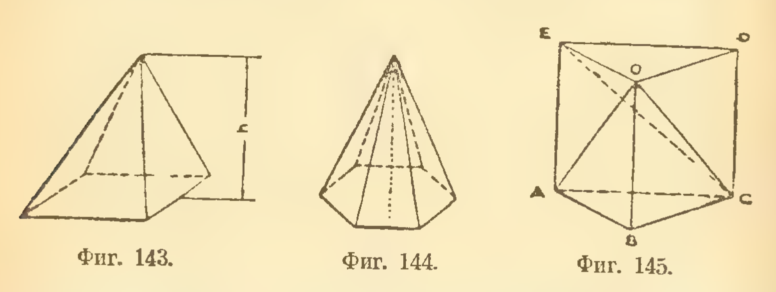
$$Q = V.\ A.$$

$$V = 90 \text{ метров} = 9000 \text{ см.}$$
$$A = 0{,}7854 \times 10^2 = 78{,}54 \text{ кв. см.}$$
$$Q = 9000 \times 78{,}54 = 706{,}860 \text{ куб. см.} = 706{,}86 \text{ литра.}$$
$$1 \text{ ведро} = 12{,}3 \text{ литра.}$$
$$Q = 70686 : 12{,}3 = 57{,}5 \text{ ведра в мин.}$$

§ 90. Пирамида.

Пирамидою называется тело, имеющее в основании любой многоугольник и боковые треугольные грани, сходящиеся своими вершинами в одной точке, называемой вершиной пирамиды.

В пирамиде, показанной на фиг. 143, основанием служит параллелограм, а в фиг. 144—шестиугольник.



Фиг. 143. Фиг. 144. Фиг. 145.

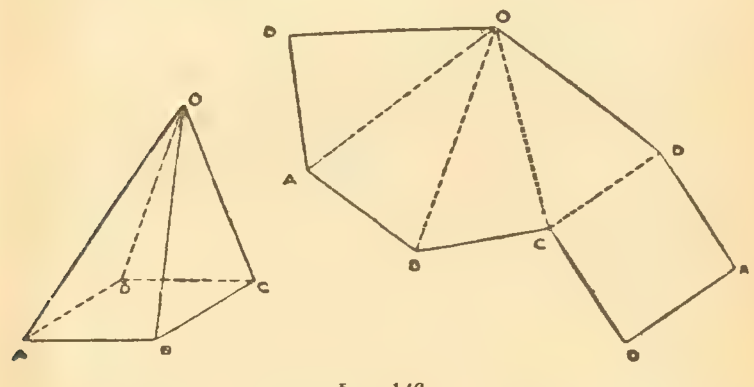
Если в основании лежит правильный многоугольник, и если вершина находится как раз над центром, то пирамида называется **правильной** (фиг. 144).

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту. Доказывается это тем, что пирамида пред-

ставляет собою одну третью часть призмы, имеющей одинаковое с пирамидой основание и высоту. Взглянем на фиг. 145. Изображенная там призма с основаниями ABC и DEO может быть разложена на три пирамиды, которые по объему равны между собою, а поэтому каждая в отдельности равна трети объема всей призмы.

Действительно, пирамиды $O-AEC$ и $O-EDC$ по объему равны, т. к. имеют общую вершину и равные по площади основания, лежащие в общей плоскости.

Остается пирамида $O-ABC$. Докажем, что она равна по



Фиг. 146.

объему одной из двух только что рассмотренных пирамид, напр., $O-AEC$.

Обе пирамиды могут быть рассматриваемы, как пирамиды $C-OAB$ и $C-OAE$, но у них общая вершина C и равновеликие основания; следовательно они равны.

Развертка полной поверхности пирамиды показана на фиг. 146.

§ 91. Конус.

Конус отличается от пирамиды тем, что его основание представляет собою криволинейную фигуру вместо многоугольника. Обыкновенно основанием является круг, а вершина конуса расположена над центром основания (фиг. 147). Расстояние от вершины до основания (по перпендикуляру к основанию) называется высотою конуса h, а наклонная линия, идущая от вершины к окружности основания, носит название **образующей** s.

Так же, как и для пирамиды, объем конуса получается умножением площади основания на треть высоты, что дает формулу:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi d^2 h}{12}.$$

Боковая поверхность конуса есть половина произведения окружности основания на образующую, т. е.

$$A = \frac{1}{2} \times 2\pi rs = \pi rs = \frac{\pi ds}{2}.$$

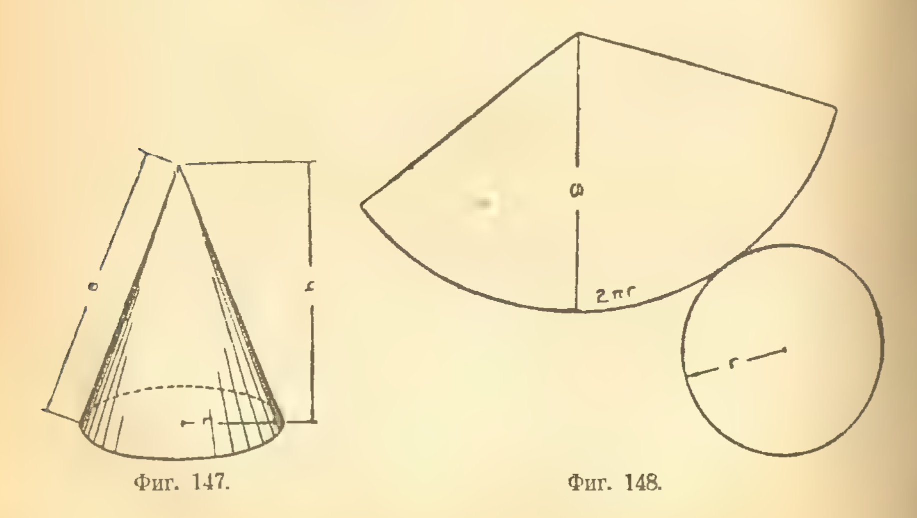
Полная поверхность конуса получается добавлением к боковой поверхности еще площади основания:

$$s = \pi rs + \pi r^2 = \pi r(s + r).$$

Образующая может быть выражена через высоту и радиус, т. к. она представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами h и r.

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Развертка конуса показана на фиг. 148. Она представляет собой круговой сектор с радиусом, равным образующей s и с дугою, равною окружности основания $2\pi r$. Величина угла у



Фиг. 147. Фиг. 148.

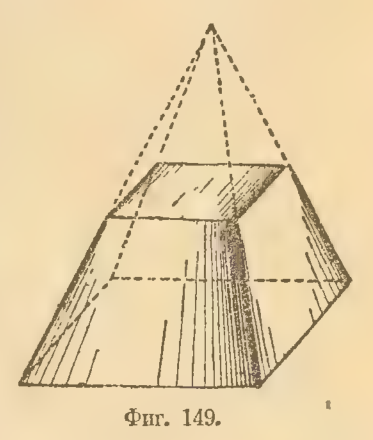
вершины развертки во столько раз меньше полной окружности, во сколько раз радиус основания конуса меньше образующей, т. е.

$$\text{угол} = \frac{r}{s} 360^\circ.$$

Вычислив этот угол и проведя дугу радиусом s, засекающую его стороны, мы получим развертку боковой поверхности конуса; добавив к этому круг с радиусом r, мы получим полную развертку (фиг. 148).

§ 92. Усеченная пирамида и усеченный конус.

Если удалить верхнюю часть пирамиды или конуса (фиг. 149 для усеченной пирамиды), мы получим тело с двумя основаниями (верхним и нижним) и наклонными плоскостями или наклонной кривой поверхностью; это тело носит название усеченной пирамиды (или конуса). Объем тела можно вычислить, отняв от полного объема верхнюю часть. Если мы назовем через B площадь нижнего основания, а через b площадь верхнего основания, при чем через h мы обозначим высоту усеченной пирамиды (или конуса), т. е. нижней части, после отсечения верха, то объем V выразится формулой:



Фиг. 149.

$$V = \frac{B + b + \sqrt{Bb}}{3} h.$$

Пример. Воронка имеет глубину 75 см., вверху она представляет собою квадрат со стороною в 90 см., а внизу — квадрат со стороною в 60 см; определите ее объем.

$$B = 90^2 = 8100 \text{ кв. см.}; b = 60^2 = 3600 \text{ кв. см.}$$

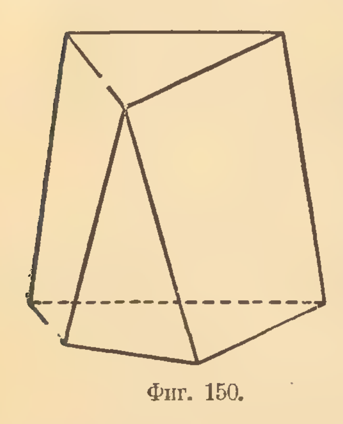
$$\sqrt{Bb} = \sqrt{8100 \times 3600} = \sqrt{90^2 \times 60^2} = \sqrt{(90 \times 60)^2} =$$
$$= 90 \times 60 = 5400 \text{ кв. см.}$$

$$\text{Следовательно: } V = \frac{8100 + 3600 + 5400}{3} \times 75 = 427500 \text{ куб. см.}$$

$$= 427{,}5 \text{ литра.}$$

§ 93. Призматоид.

Имеется много тел, имеющих два параллельных основания и наклонные (фиг. 150) или кривые грани, не сходящиеся в общей вершине; для вычисления объема таких призматоидов употребляется формула, приложимая также к усеченным пирамидам и конусам и являющаяся лишь ее видоизменением и обобщением.


Фиг. 150.

Назовем через A площадь одного основания, через B—площадь другого, а через C—площадь сечения, полученного посредине между обоими основаниями. Пусть h будет высота призматоида, а V — его объем, тогда формула для объема призматоида примет вид:

$$V = \frac{A + B + 4C}{6} h.$$

В некоторых случаях эта формула является лишь приближенной, но обыкновенно приближение вполне достаточно для практики и формулой пользуются очень широко.

Пример. Вычислить объем бочки в литрах, если высота ее внутри 70 см., большой диаметр внутри и посредине 50 см., а верхний и нижний диаметры внутри 40 см.

$$V = \frac{A + B + 4C}{6} h.$$

Назовем большой диаметр через D, а малые через d.

$$D = 50, d = 40, h = 70;$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; B = \frac{\pi d^2}{4}; C = \frac{\pi D^2}{4}$$

Следовательно, формула преобразуется в

$$V = \frac{\pi}{24}(d^2 + d^2 + 4D^2)h = \frac{\pi}{12}(d^2 + 2D^2)h,$$

или

$$V = 0{,}2618(d^2 + 2D^2)h \text{ куб. см.}$$

или, деля на 1000, чтобы иметь сразу результат в литрах:

$$V = 0{,}000262\,(d^2 + 2D^2)\,h \text{ литров;}$$

$$d^2 = 40^2 = 1600;\ 2D^2 = 2 \times 50^2 = 5000;\ h = 70;$$

$$V = 0{,}000262\,(1600 + 5000)\,70 = 0{,}000262 \times 462000;$$

$$V = 121 \text{ литр.}$$

Для вычисления объема бочек существует также другая формула, выведенная на основании совершенно других соображений. Этот объем в кубических единицах будет:

$$V = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d + 2D}{3}\right)^2 h \text{ куб. см.}$$

или в литрах

$$V = 0{,}0000873\,(d + 2D)^2\,h \text{ литров.}$$

Произведя расчет по этой формуле, мы получим:

$$V = 120 \text{ литров.}$$

Разница всего на $^5/_6\%$, что очень немного, поэтому обе формулы одинаково хороши для практики.

§ 94. Шар.

Шар есть тело, все точки поверхности которого равно удалены от центра; это общее по величине расстояние называется **радиусом** шара. Удвоенный радиус или расстояние между двумя противоположными по отношению к центру точками шара называется **диаметром**. На шар можно еще смотреть как на тело, полученное от вращения полуокружности вокруг ее диаметра.

Если вокруг шара вообразить цилиндр (фиг. 151), касающийся шара вдоль **большого круга**, т. е. круга, проходящего через центр шара, а также сверху и снизу (обоими основаниями), то можно доказать, что боковая поверхность такого цилиндра равна поверхности шара. Цилиндр этот имеет радиусом основания радиус шара, а высотою — удвоенный радиус, следовательно, его боковая поверхность будет:

$$2\pi r \times 2r = 4\pi r^2 \text{ или же}$$

$$\pi d \times d = \pi d^2.$$

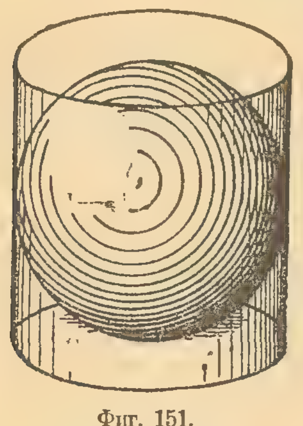
Эта боковая поверхность цилиндра равна поверхности шара s и вместе с тем она же равна учетверенной площади большого круга A:

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4};$$

$$\text{следовательно: } s = 4\pi r^2 = \pi d^2 = 4A.$$

Итак, поверхность шара в четыре раза больше площади круга такого же диаметра.

Чтобы определить объем шара, вообразим его разделенным на очень большое число маленьких пирамидок (фиг. 152), име





Фиг. 151.



Фиг. 152.

ющих вершины в центре шара, а основания на поверхности шара. Каждая из этих пирамидок имеет объем, равный площади основания, помноженной на треть высоты: если мы сложим их все вместе, то мы получим объем шара, равный сумме всех этих площадей, помноженной на треть высоты, или — поверхности шара, помноженной на треть радиуса.

$$V = \tfrac{1}{3}\ \text{радиуса} \times \text{поверхность};$$

$$V = \frac{1}{3} \times r \times 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

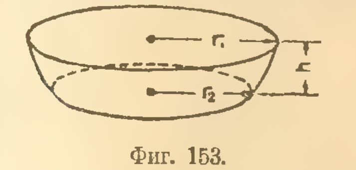
или подставляя вместо радиуса половину диаметра:

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{d^3}{8} = \frac{1}{6}\pi d^3,$$

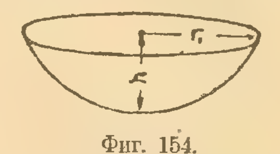
$$V = 0{,}5236\, d^3 = 4{,}1888\, r^3.$$

§ 95. Сферический отрезок и сферический сегмент.

Если мы отрежем от шара часть, заключенную между двумя параллельными плоскостями (фиг. 153), то мы получим сфери-



Фиг. 153.



Фиг. 154.

ческий отрезок. Если мы предположим, что одна из плоскостей коснулась шара (т. е. превратилась в точку), мы будем иметь сферический сегмент (фиг. 154).

Формула для объема сферического отрезка будет:

$$V = \frac{h}{2}(\pi r_1^2 + \pi r_2^2) + \frac{\pi h^3}{6}.$$

Если мы сделаем $r_2 = 0$, то получим формулу для объема сферического сегмента:

$$V = \frac{\pi r_1^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.$$

Поверхность (кривая) сферического отрезка или сегмента равна окружности большого круга шара, помноженной на высоту отрезка или сегмента:

$$S = 2\,\pi r h = \pi d h.$$

§ 96. Шаровое кольцо.

На фиг. 155 показано шаровое кольцо или тор; оно получено от передвижения шара или его диаметрального сечения, т.-е. большого круга, его центром по замкнутой окружности.



Фиг. 155.

Назовем r радиус сечения кольца и R радиус окружности, по которой движется центр сечения, образующего кольца.

Объем кольца равен площади сечения, помноженной на длину окружности, описанной центром сечения:

$$V = \pi r^2 \times 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

Поверхность кольца равна окружности сечения, помноженной на длину окружности, описанной центром сечения:

$$S = 2\pi r \times 2\pi R = 4\pi^2 r R.$$

§ 97. Объемы тел неправильной формы.



Фиг. 156.

Когда форма тела настолько неправильна, что вычисление его объема способом разложения на составные части является затруднительным, можно определить объем, погружая тело в сосуд с жидкостью (фиг. 156), и по поднятию жидкости в сосуде вычислить вытесненный телом объем жидкости, а следовательно и объем тела. Если тело сделано из однородного материала, можно взвесить его и, зная вес единицы объема материала, можно легко вычислить объем тела.

Если тело имеет пустоту, то объем пустоты может быть определен взвешиванием воды, наполняющей пустоту, и делением этого веса на вес единицы объема воды.

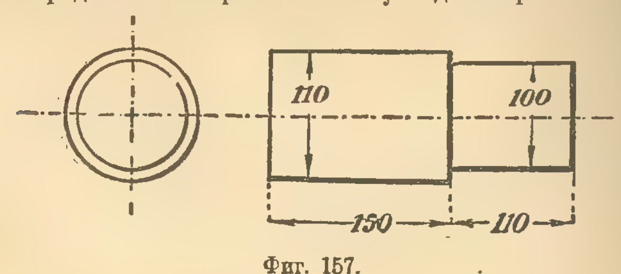
Задачи

141. Определите вес стального стержня, показанного на фиг. 157. Удельный вес стали = 7,8.

142. Определите вес бронзового вкладыша, показанного на фиг. 158. Удельный вес бронзы = 8,6.

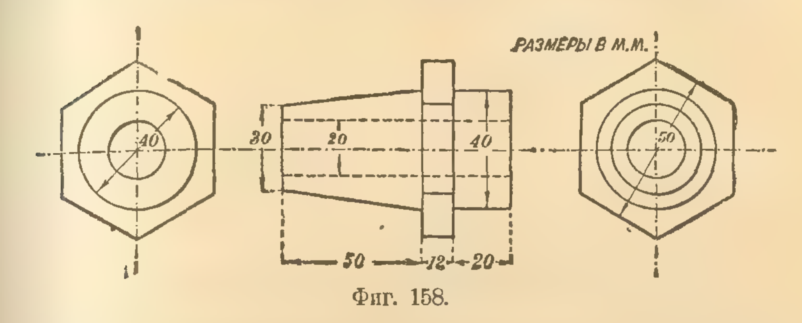
143. Определите вес головки (фиг. 108) железного ключа для болта диаметром $\frac{3''}{4}$. Толщина головки 15 мм. Удельный вес железа = 7,8.

144. Определите поверхность глобуса диаметром в 60 см.



Фиг. 157.

145. Котел требует для своего питания 14 литров воды в час на одну лошадиную силу машины. Какой диаметр требуется для питательной трубы, подающей воду в котел, при мощности машины в 250 лошадиных сил, со скоростью $1^1/_2$ метра в сек.?



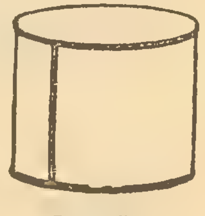
Фиг. 158.

146. Фундамент газовой машины имеет следующие размеры: высоту $1^1/_2$ метра, нижнее основание 2×4 метра и верхнее основание 1×3 метра. Определите объем фундамента.

147. Моток стальной проволоки весит 19,5 кило; диаметр ее $2^1/_2$ мм. Определите длину проволоки в мотке, зная, что удельный вес стали $= 7,8$.

148. Определите диаметр чугунного шара весом 30,2 килограмма, зная, что удельный вес чугуна $= 7,2$.

149. Чугунное маховое колесо с наружным диаметром в 1,5 метра имеет обод прямоугольного сечения, шириною 200 мм. и толщиною 80 мм. Определите вес обода.


Фиг. 159.

150. Крюк, изображенный на фиг. 156, опускается в сосуд диаметром в 12 см.; вода в сосуде подымается при этом на 1 см.

Определите объем крюка.

151. Определите полную наружную поверхность цилиндрического барабана (фиг. 159) диаметром 30 см. и высотою 30 см.

ГЛАВА XIV.

Тригонометрические функции. Тангенс и котангенс.

§ 98. Тригонометрия и ее применение.

Тригонометрия есть та часть математики, которая имеет дело с углами и сторонами треугольников и с зависимостями, существующими между ними. Тригонометрия полезна в мастерской при работе на фрезерных станках; ею пользуются при расчетах конических шестерен и червячных передач, а также при нарезке винтов, при отделке наклонных плоскостей и во многих случаях, встречающихся при точной машинной работе. Для чертежника, техника, землемера и т. д. тригонометрия необходима.

В тригонометрии мы имеем дело с так называемыми **функциями углов**. Функция есть зависимость между величинами. Всякая величина, зависящая от угла, называется функцией угла. Если мы построим прямоугольный треугольник с заданным острым углом у одной из вершин, то все стороны находятся в известных отношениях одни к другим. Эти отношения или зависимости называют **тригонометрическими функциями.**

§ 99. Тангенс.

Первая тригонометрическая функция, которой мы займемся, носит название **тангенс**. Пусть AOB изображает любой угол (фиг. 160). Опустим из какой нибудь точки P на стороне OA перпендикуляр на другую сторону OB; это даст нам прямоугольный треугольник PNO. Где бы мы ни взяли точку P, отношение $PN : ON$ всегда останется неизменным; оно может служить для определения величины данного угла.

Возьмем для примера угол, изображенный на фиг. 161. Допустим, что $ON = 10$ см., а $NP = 7^1/_2$ см.

$$\frac{NP}{ON} = \frac{7^1/_2}{10} = 0,75.$$

Пусть теперь $ON' = 20$ см.; очевидно, что $N'P' = 15$ см.

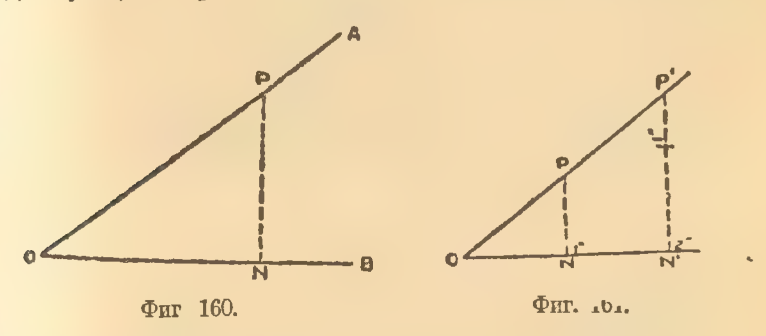
$$\frac{N'P'}{ON'} = \frac{15}{20} = 0,75.$$

Отношение осталось то же самое.

Сторона ON — прилежащая к данному углу, а NP — противолежащая сторона (фиг. 160). **Отношение противолежащей стороны к прилежащей стороне некоторого угла (в прямоугольном треугольнике) называют тангенсом этого угла.**

$$\frac{NP}{ON} = \operatorname{tg} PON.$$

Для угла, изображенного на фиг. 161, это отношене есть



Фиг 160.

Фиг. 161.

0,75; следовательно для этого угла тангенс равен 0,75. Это пишется так:

$$\operatorname{tg} PON = 0,75.$$

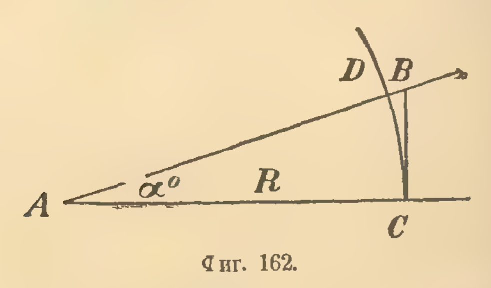
Существуют таблицы, дающие величины тангенсов для всех углов; пользуясь ими, можно вычислить или построить всякий угол по его тангенсу.

Для небольших углов (не более 6°) тангенсы можно вычислить очень просто. Возьмем небольшой угол $a°$ (фиг. 162) и проведем дугу CD радиусом, равным R. В точке пересечения дуги с одной из

сторон угла восставим перпендикуляр к стороне и продолжим его до пересечения с другой стороною. Тогда

$$\text{tg}a = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{R}$$

при малых размерах угла a длина перпендикуляра BC очень незначительно отличается от длины дуги DC, которую обозна-



Фиг. 162.

чим через L; поэтому для малых углов в выражении тангенса можно длину BC заменить длиною дуги L. Следовательно, мы будем иметь:

$$\text{tg}a = \frac{L}{R}.$$

Но длина дуги L составляет такую же часть окружности, какую часть число градусов в угле a составляет от $360°$; можно написать, что

$$\frac{L}{2\pi R} = \frac{a°}{360°};$$

отсюда находим:

$$\frac{L}{R} = \frac{2\pi a}{360} = \frac{2 \times 3{,}1416 \times a}{360} = \frac{\quad}{57{,}3} = 0{,}01745a;$$

таким образом величина тангенса небольшого угла выражается через число градусов a этого угла следующей формулой.

$$\text{tg}a° = 0{,}01745 . a.$$

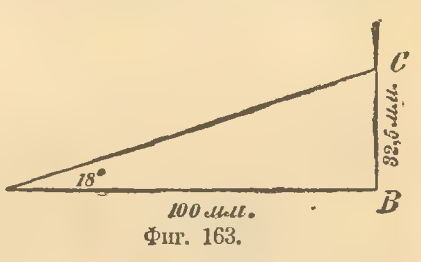
По этой формуле найдем: $\text{tg}\ 1° = 0{,}0175$; $\text{tg}\ 2° = 0{,}0349$; $\text{tg}\ 3° = 0{,}0524$; $\text{tg}\ 4° = 0{,}0698$, и т. д.

Сравните эти числа с приведенными в таблице на стр. 185.

§ 100. Построение угла по его тангенсу.

Обыкновенно построение углов по тангенсам точнее построения их транспортиром, поэтому, где требуется точность, предпочитают пользоваться таблицами тангенсов (они даны в этой книге и во многих справочниках).

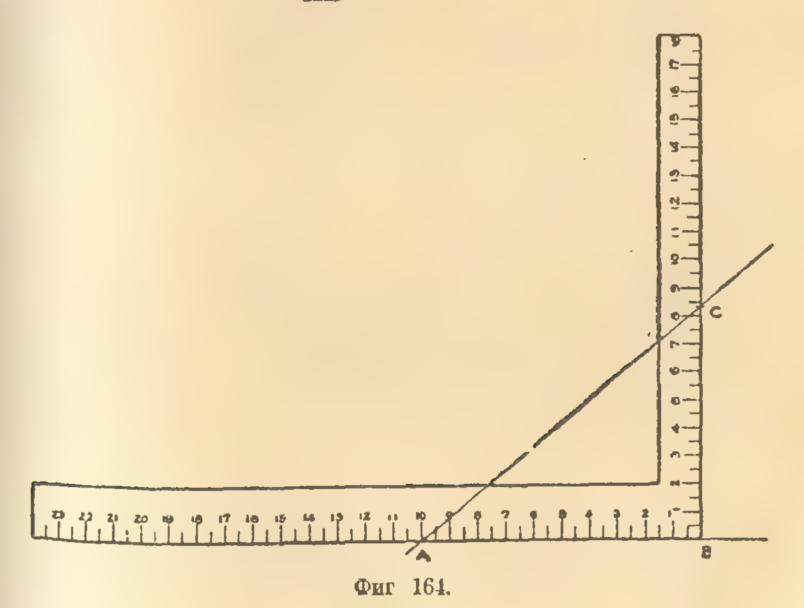
Допустим, что требуется построить угол в 18° по его тангенсу ($\operatorname{tg} 18° = 0{,}3249$). Это значит, что если мы построим прямоугольный треугольник с отношением противолежащей стороны к прилежащей, равным 0,3249, то соответствующий угол будет 18°.



Фиг. 163.

Отложим по прямой AB (фиг. 163) произвольную длину (напр., 10 см.); восставим перпендикуляр в точке B и отложим длину BC, равную длине AB, помноженной на данный тангенс угла. Тогда очевидно:

$$\frac{BC}{AB} = \operatorname{tg} CAB.$$



Фиг 164.

BC взято на чертеже равным $32\frac{1}{2}$ мм., так как

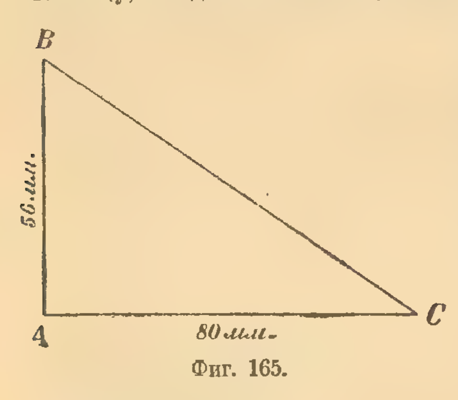
$$10 \times 0,3249 = 3,249, \text{ т.-е. почти } 32\tfrac{1}{2} \text{ мм.}$$

На фиг. 164 показано построение угла в 40° посредством наугольника с делениями на обеих сторонах. Прилежащая сторона AB взята для простоты равной 10 см., а противолежащая сторона BC получена умножением на 10 тангенса 40°, взятого из таблиц (tg 40° = 0,8391). Взяв BC, в данном случае 8,39 см. и соединив C с A, мы получим угол CAB, равный 40°, так как

$$\frac{BC}{AB} = \frac{8,39}{10} = 0,839 = \text{tg } 40°.$$

§ 101. Измерение углов посредством их тангенсов.

Угол может быть измерен посредством его тангенса; взглянув в таблицу, найдем соответствующее число градусов и минут.



Фиг. 165.

Пусть дан угол, изображенный на фиг. 165. Отложим, напр., $AC = 80$ мм. и измерим AB; допустим, мы получим 56 мм.; тогда отношение противолежащей стороны к прилежащей, т.-е. тангенс угла будет:

$$\text{tg } BCA = \frac{56}{80} = 0,7.$$

Взглянув в таблицу (см. стр. 191) мы находим что:

$$\text{tg } 35° = 0,7002.$$

Поэтому без большой ошибки можем сказать, что наш угол равен 35°.

§ 102. Примеры на применение тангенсов.

Тангенсы очень полезны при определении углов на основании размеров, данных на чертеже. Допустим, что нам нужно прорезать наклонную канавку в бруске, показанном на фиг. 166. Если

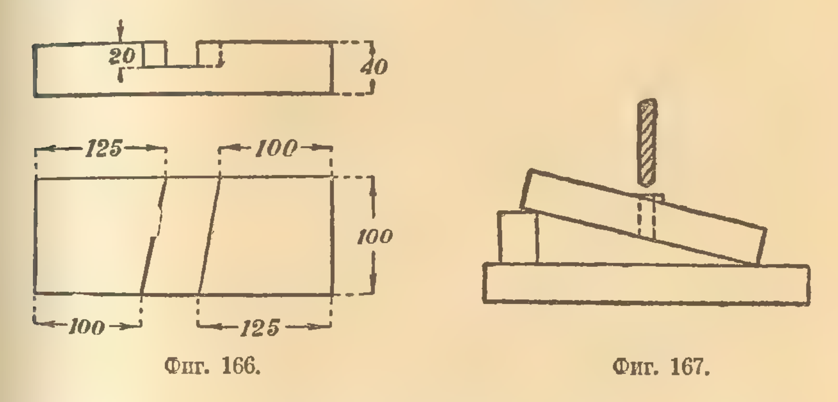
мы будем знать в градусах угол, образуемый боковой стороною канавки с узкою стороною бруска, то мы зажмем наш брусок в универсальных тисках и повернем их так, что резец прострогает канавку под требуемым наклоном.

Из чертежа видно, что этот угол таков, что на 100 мм. одна из его сторон поднимается на 25 мм. ($=125-100$), следовательно, тангенс этого угла будет равен $\frac{1}{4}$, т.-е. 0,25. В таблицах мы находим:

$$\operatorname{tg} 14^\circ = 0{,}2493:$$

мы должны повернуть универсальные тиски на 14°.

На фиг. 167 показано другое практическое применение. До-



Фиг. 166. Фиг. 167.

пустим, что нам требуется просверлить отверстие под некоторым углом к отвесному направлению, напр., под углом в 12° 40′. Мы можем легко вычислить, насколько мы должны приподнять один из краев предмета, чтобы сверло пошло в желаемом направлении. Из таблиц мы находим что

$$\operatorname{tg} 12^\circ\ 40' = 0{,}2247.$$

Следовательно, если мы возьмем подпорку в 54 мм. вышины и отодвинем ее на 240 мм. от края, мы будем иметь отношение между противолежащей и прилежащей сторонами:

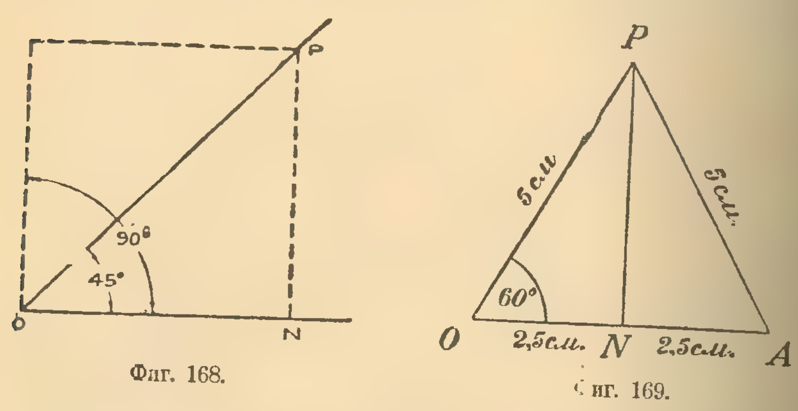
$$\frac{54}{240} = 0{,}225,$$

что и представляет собою почти точно tg 12° 40′.

§ 103. Тангенсы некоторых часто встречаемых углов

Очень полезно запомнить тангенсы некоторых часто встречаемых углов, каковыми, напр., являются 30°, 45°, 60°.

Самый простой случай это, когда мы имеем 45°, т.-е. половину прямого угла (фиг. 168). Прямая, проведенная под углом



Фиг. 168.

Фиг. 169.

в 45°, будет обладать тем свойством. что противолежащая PN и прилежащая сторона ON всегда будут равны друг другу. Такая прямая будет диагональю квадрата, а поэтому искомая величина тангенса будет единица:

$$\frac{NP}{ON} = 1.$$

Всякий угол меньший 45° будет иметь тангенс меньше единицы; всякий угол больший 45° будет иметь тангенс больше единицы.

Определим тангенс 60°. Вспомним, что в равностороннем треугольнике все углы равны 60°. Построим равносторонний треугольник AOP (фиг. 169) со сторонами в 5 см. Проведем высоту PN, которая даст точку N на середине между O и A. Здесь PN есть катет прямоугольного треугольника с гипотенузой в 5 см. и другим катетом в 2,5 см., следовательно:

$$PN = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{(2.2{,}5)^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{2{,}5^2(2^2 - 1^2)} =$$
$$= \sqrt{2{,}5^2.3} = 2{,}5\sqrt{3}.$$

Но тангенс угла PON, равного 60°, будет равен отношению $PN : ON$, т.-е. $\sqrt{3} : 1$, следовательно:

$$\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} = 1{,}7321.$$

Пользуясь той же формулой, легко получить тангенс угла в 30°. Заметим, что прямая PN делит угол у вершины OPA, равный 60°, пополам; следовательно, угол $OPN = 30°$. Тангенс OPN, равный отношению противолежащей стороны ON к прилежащей NP, даст:

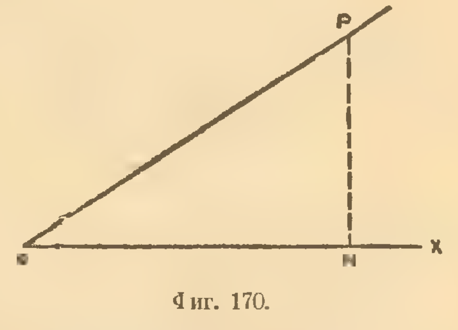
$$\operatorname{tg}\ OPN = \frac{ON}{NP};$$

иными словами,

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{2{,}5}{2{,}5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1{,}732} = 0{,}5774.$$

Если мы будем опускать наклонную прямую OP (фиг. 170), то отношение $PN : ON$ будет постепенно уменьшаться; если OP совпадает с ON, то угол PON превратится в 0, и отношение $PN : ON$ — в нуль, следовательно:

$$\operatorname{tg}\ 0° = 0.$$



Фиг. 170.

Если мы будем поднимать наклонную прямую OP, то отношение $PN : ON$ будет постепенно увеличиваться и, наконец, когда она станет отвесно, т.-е. когда угол PON станет прямым, то OP сделается параллельно PN; иными словами, точка P уйдет в бесконечность. Отношение $PN : ON$ превратится в бесконечность (обозначаемую в математике значком ∞) и поэтому

$$\operatorname{tg}\ 90° = \infty.$$

Примечание. Обратите внимание на то, что хотя 45° есть половина 90°, но $\operatorname{tg}\ 45° = 1$, а $\operatorname{tg}\ 90° = \infty$; точно так же: $\operatorname{tg} 60° = 1{,}7321$, а $\operatorname{tg}\ 30° = 0{,}5774$. Поэтому не делайте ошибки, думая,

что тангенс половинного угла должен быть половиною тангенса целого угла, или, наоборот, что тангенс двойного угла должен быть равен удвоенному тангенсу целого угла; это неправильно.

§ 104. Котангенс

Во всяком треугольнике сумма трех углов равна двум прямым (§ 62); следовательно, если треугольник прямоугольный, то в нем остающиеся два угла составят вместе один прямой; иными словами, острые углы прямоугольного треугольника дополняют друг друга до 90° (§ 47). Рассмотрим прямоугольный треугольник PNO (фиг. 170); в нем для острых углов (с вершиною в O и P) имеем:

$$\angle PON + \angle OPN = 90^\circ.$$

Мы назвали тангенсом $\angle PON$ отношение противолежащей стороны PN к прилежащей ON:

$$\operatorname{tg} PON = \frac{PN}{ON}.$$

Обратное отношение, т.-е. $ON : PN$, называется котангенсом угла PON:

$$\operatorname{ctg} PON = \frac{ON}{PN} = \frac{1}{\operatorname{tg} PON}.$$

Следовательно, котангенсом угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Теперь посмотрим на угол OPN; для него тангенсом будет величина обратная тангенсу PON, так как

$$\operatorname{tg} OPN = \frac{ON}{PN} = \frac{1}{\operatorname{tg} PON}.$$

Но эта величина будет котангенсом угла PON; следовательно,

$$\operatorname{tg} OPN = \operatorname{ctg} PON,$$

и обратным образом:

$$\operatorname{ctg} OPN = \operatorname{tg} PON.$$

Котангенсы важны тем, что, если при решении тригонометрической задачи приходится делить какую-нибудь величину на тангенс какого-нибудь угла, мы можем вместо этого найти в таблице котангенс того же угла и затем умножить его на данную величину.

Мы определили тангенсы некоторых простых часто встречающихся углов, какими являются 30°, 45°, 60° и 90°, а именно:

$$\operatorname{tg} 30° = 0{,}5774;$$
$$\operatorname{tg} 60° = 1{,}7321 = \sqrt{3};$$
$$\operatorname{tg} 45° = 1;$$
$$\operatorname{tg} 90° = \infty, \text{ а также } \operatorname{tg} 0° = 0.$$

Если мы возьмем обратные величины, то мы получим котангенсы тех же углов, а именно:

$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{1}{\operatorname{tg} 30°} = \frac{1}{0{,}5774} = 1{,}7321 = \operatorname{tg} 60°;$$

$$\operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{1}{1{,}7321} = 0{,}5774 = \operatorname{tg} 30°;$$

$$\operatorname{ctg} 45° = \frac{1}{\operatorname{tg} 45°} = \frac{1}{1} = 1 = \operatorname{tg} 45°;$$

$$\operatorname{ctg} 90° = \frac{1}{\operatorname{tg} 90°} = \frac{1}{\infty} = 0 = \operatorname{tg} 0°;$$

$$\operatorname{ctg} 0° = \frac{1}{\operatorname{tg} 0°} = \frac{1}{0} = \infty = \operatorname{tg} 90°.$$

В таблице тангенсов и котангенсов мы найдем:

$$\operatorname{tg} 40° = 0{,}8391 = \operatorname{ctg} 50° \quad (40° + 50° = 90°);$$
$$\operatorname{tg} 50° = 1{,}1918 = \operatorname{ctg} 40°;$$
$$\operatorname{tg} 25° = 0{,}4663 = \operatorname{ctg} 65° \quad (25° + 65° = 90°);$$
$$\operatorname{tg} 65° = 2{,}1445 = \operatorname{ctg} 25°.$$

Заметим, что тангенсы увеличиваются вместе с углом, котангенсы, наоборот, уменьшаются при увеличении угла.

§ 105. Пользование таблицей тригонометрических величин.

Обратимся к таблице тригонометрических величин в этой книге; посмотрим, как в ней расположены величины и научимся пользоваться ею (см. стр. 185—192).

Таблица состоит из нескольких страниц, составляющих одно целое, и имеет десять столбцов. Первый и последний имеют вверху и внизу значек (°), обозначающий градусы.

В первом столбце градусы идут увеличиваясь: 0, 1, 2,.... 5, 6..... 11, 12,..... 36,...... 42,...... 45.

В десятом, т.-е. последнем, столбце градусы идут уменьшаясь: 90, 89,.... 84,..... 78,..... 66,..... 54,..... 48,..... 45.

Но мы можем читать градусы углов по порядку, если, пользуясь **левым**, т.-е. первым столбцом, мы будем читать **сверху вниз**, а затем, когда дойдем до последней страницы таблицы (до 45°), мы будем продолжать счет градусов, пользуясь **правым**, т.-е. десятым столбцом, и начнем от 45° читать **снизу вверх**, пока не дойдем до 90°.

Второй и девятый столбец обозначены значком (′), что значит **минуты**, т.-е. шестидесятые доли градусов.

Против каждого **целого** градуса, указанного в первом и десятом столбце, мы имеем 0 в столбцах для минут, затем стоят 10, 20, 30, 40 и 50, после чего мы опять имеем следующий целый градус с числом минут 0.

В правом (девятом) столбце для минут порядок следования их обратный, а именно: 0, 50, 40, 30, 20, 10 и опять 0 и т. д., так как мы должны так же, как и для целых градусов, читать минуты не сверху вниз, а снизу вверх, раз мы имеем дело с углом большим, чем 45°.

Остальные шесть столбцов таблицы (3-ий, 4-ый, 5-ый, 6-ой, 7-ой и 8-ой) имеют различные заголовки, а именно, читая сверху: *sinus*, *cosecans*, *tangens*, *cotangens*, *secans* и *cosinus*, а читая снизу: *cosinus*, *secans*, *cotangens*, *tangens*, *cosecans* и *sinus*.

Пока мы познакомились только с тригонометрическими функциями, называемыми тангенс и котангенс и обозначенными в таблице словами: *tangens* и *cotangens*. До остальных (Синус, Косеканс, Секанс и Косинус) функций мы дойдем своевременно и о них сейчас говорить не будем.

Итак, в данной таблице мы пока будем интересоваться только двумя средними столбцами (5 и 6).

Пятый столбец имеет вверху слово *tangens*, а внизу *cotangens*; а шестой столбец имеет вверху слово *cotangens*, а внизу *tangens*.

Если мы желаем найти тангенс угла **меньшего, чем 45°**, мы находим его против наименования в градусах и минутах, помещенного **слева**, и читаем таблицу, идя **сверху вниз**, в столбце обозначенном *tangens* **вверху**.

Если мы желаем найти тангенс угла **большего, чем 45°**, мы находим его против наименования, помещенного **справа**, и читаем таблицу, идя **снизу вверх** в столбце, обозначенном *tangens* **внизу**.

Для отыскания котангенса мы поступаем подобным же образом и находим ответ в столбце, обозначенном *cotangens*: вверху, если угол меньше 45° и внизу, если угол больше 45°.

Проделайте несколько примеров сами и вы без труда будете находить тангенсы и котангенсы любых углов.

Если данный угол или данный тангенс в таблице не находится, то приходится промежуточные искомые значения отыскивать путем дополнительных вычислений.

1. Пусть требуется найти tg 40° 47′.

Такого угла 40° 47′ в таблице нет, поэтому берем из таблиц два угла, между которыми заключается данный угол, и выписываем тангенсы, соответствующие этим двум углам; получаем:

$$\operatorname{tg} 40^\circ\ 40' = 0{,}8591;$$
$$\operatorname{tg} 40^\circ\ 50' = 0{,}8642.$$

Из этих данных видно, что при изменении угла на 10′ тангенс изменяется на 51 единицу последнего (четвертого) десятичного знака. Найдем, какое изменение тангенса соответствует изменению угла на 7′, как этого требует данный угол. Искомое изменение определяется пропорцией:

$$\begin{array}{c} 10' - 51 \\ 7' - x \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad x : 51 = 7' : 10';$$

отсюда $x = \frac{51.7}{10} = 35{,}7$ или, отбрасывая десятые доли: $x = 36.$

Следовательно, искомый $\operatorname{tg} 40^\circ\ 47' = 0{,}8527.$

2. Пусть требуется найти угол, cotg которого $= 0,4336$. Выписываем из таблиц два котангенса, между которыми лежит данное значение, и соответствующие этим котангенсам углы:

$$\text{cotg}\, 66^\circ 30' = 0,4348;$$
$$\text{cotg}\, 66^\circ 40' = 0,4314.$$

Сравниваем данный котангенс с котангенсом меньшего угла, чтобы найденную поправку пришлось бы прибавлять, а не вычитать. Для вычисления того числа минут x, которое надо прибавить к меньшему углу $66^\circ 30'$, чтобы получить искомый, имеем пропорцию:

$$\begin{array}{c} 10' - 34 \\ x - 12 \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad x : 10' = 12 : 34;$$

откуда: $$x = \frac{10 \times 12}{34} = 3,52'$$ или, отбрасывая доли, получим:

$$x = 4'.$$

Следовательно, искомый угол равен $66^\circ 34'$.

Таблицы устроены так, что на одной и той же строчке углы, читаемые слева, идя сверху вниз, и углы, читаемые справа, идя снизу вверх, являются дополнительными до 90°, а так как тангенс угла равен котангенсу дополняющего первый угол до 90°, то заголовки *tangens* и *cotangens* стоят вверху и внизу одного и того же столбца.

Возьмем для примера угол 2°. Его тангенс (см. вверху) равен 0,0349; в таблице стоит .0349, так как нуль всюду пропущен и вместо десятичной запятой стоит точка; с другой стороны, это же число 0,0349 является котангенсом угла в 88° (см. направо и вниз).

Теперь возьмем котангенс 2° (см. налево и вверх); он равен 28,6363; но это же число будет и тангенсом 88° (см. направо и вниз).

Мы можем легко убедиться, что *tangens* и *cotangens* одного угла являются обратными величинами по отношению друг к другу, взяв для этого два рядом стоящих числа в двух соседних графах.

Напр., оба вышеупомянутые числа: 0,0349 и 28,6363 таковы, что

$$\frac{1}{28,6363}=0,0349$$

и

$$\frac{1}{0,0349}=28,6363.$$

Посмотрим, чему отвечает эта особенность таблиц:

$$\operatorname{tg} 2^\circ = 0,0349 = \operatorname{ctg} 88^\circ;$$

$$\operatorname{ctg} 2^\circ = 28,6363 = \operatorname{tg} 88^\circ.$$

Кроме того, мы только что убедились, что числа 0,0349 и 28,6363 являются **обратными** величинами, следовательно:

$$\operatorname{tg} 2^\circ = \frac{1}{\operatorname{ctg} 2^\circ}$$

и

$$\operatorname{ctg} 2^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 2^\circ},$$

а также

$$\operatorname{ctg} 88^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 88^\circ}$$

и

$$\operatorname{tg} 88^\circ = \frac{1}{\operatorname{ctg} 88^\circ}.$$

Итак, тангенсы и котангенсы одних и тех же углов являются обратными величинами, а тангенсы и котангенсы углов дополнительных до 90° — равны.

Для вычисления, следовательно, достаточно знать либо тангенс, либо котангенс угла, так как, зная один, мы можем получить и другой, взяв обратную величину, т.-е. разделив единицу на известное число.

Мы говорили о том, что для вычисления удобнее брать ту из тригонометрических функций, на которую приходится множить, а это, смотря по роду задачи, может быть либо тангенс, либо котангенс; но есть еще и другое соображение, которое более существенно, а именно: в некоторых случаях для получения большей точности следует пользоваться одной из тригонометрических функций, а в других случаях—другой.

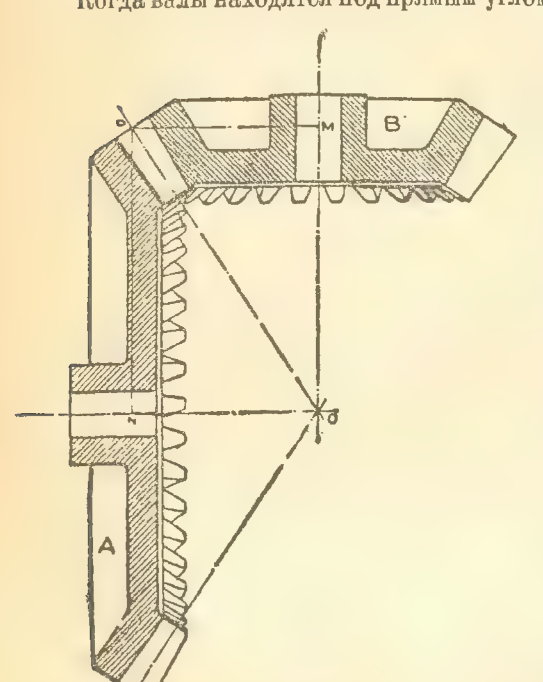
Рассматривая таблицы тригонометрических функций, мы заметим, что при равномерном изменении угла на 10′ величина

тангенса или котангенса изменяется по разному; так: у малых углов, близких к 0°, тангенс изменяется сравнительно незначительно (в сотых и тысячных долях) при изменении угла на 10′, а котангенс при тех же условиях изменяется очень сильно (на целые единицы и десятки). Наоборот, у больших углов, около 90°, тангенс меняется быстро, а котангенс медленно. Отсюда вытекает, что при нахождении угла по данной тригонометрической функции, для получения большей точности, надо исходить из такой функции, которая изменяется быстро и потому сильнее влияет на изменение самого угла. Изменение такой функции в пределах между двумя соседними табличными значениями позволяет вычислить не только минуты, но и доли минут.

Поэтому каждый раз, когда вы будете иметь дело с малыми углами, лучше пользоваться котангенсом и, наоборот, при больших углах берите тангенс.

§ 106. Конические шестерни.

Когда валы находятся под прямым углом друг к другу, тогда зубья шестерен, насаженных на эти валы, должны иметь некоторый уклон по отношению к осям шестерен (фиг. 171). Угол PON называется углом наклона зубьев шестерни A, а угол POM углом наклона зубьев шестерни B; сумма этих двух углов составляет прямой угол.



Фиг. 171.

Пусть диаметр шестерни A будет 30 см., а шестерни B — 20 см., тогда $PN = 15$ см., а $PM = 10$ см., и мы будем иметь:

$$\text{tg}\, PON = \frac{PN}{ON} = \frac{15}{10} = 1{,}5.$$

и
$$\operatorname{tg} POM = \frac{PM}{OM} = \frac{10}{15} = 0{,}6667.$$

Из таблиц находим:

$$PON = 56^\circ 18' \quad \text{и} \quad POM = 33^\circ 42'.$$

Действительно.

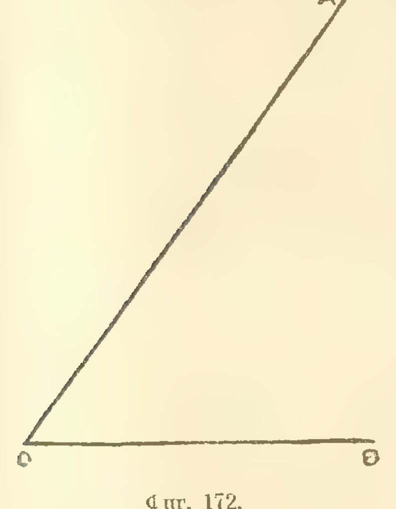
$$PON + POM = 90^\circ.$$

Задачи.

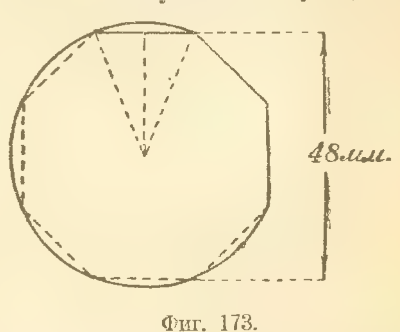
152. Определите, пользуясь таблицами, тангенсы следующих углов: 20°, 70°, 25°, $22^1/_2$°, 67° 20′.

153. Определите котангенсы следующих углов: 5°, 70°, 14° 30′, 67° 30′, 34° 40′.

154. Перечертите угол, изображенный на фиг. 172; определите построением тангенс этого угла, т.-е. отношение противолежащего катета к прилежащему, в прямоугольном треугольнике, который вы построите. Затем, зная величину тангенса угла, посмотрите в таблицу и найдите соответствующую величину угла в градусах и минутах.



Фиг. 172.



Фиг. 173.

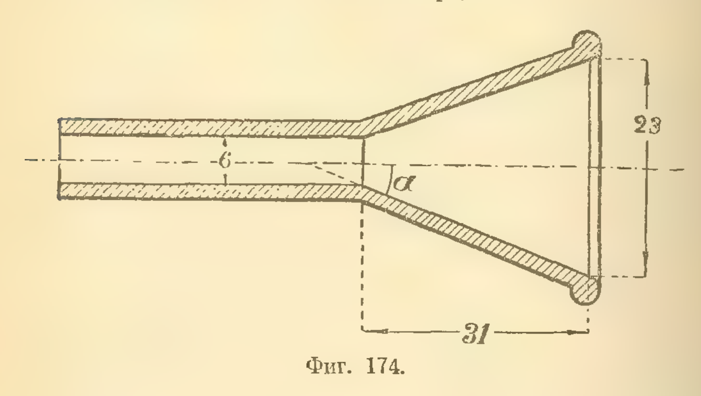
155. Дорога поднимается в гору на 25 см. на каждые 5 метров, измеренных по горизонтали. Определите угол, который дорога образует с горизонтом.

156. На фиг. 173 показан правильный восьмиугольник, который представляет собою сечение прута, обрабатываемого на

фрезерном станке. После обработки расстояние между противоположными гранями должно быть 48 мм. Расчитайте, пользуясь таблицами, длину стороны восьмиугольника. На чертеже показан пунктиром тот прямоугольный треугольник, из которого вы можете определить половину стороны восьмиугольника.

157. Определите внутренний угол a, показанный на чертеже раструба, изображенного на фиг. 174.

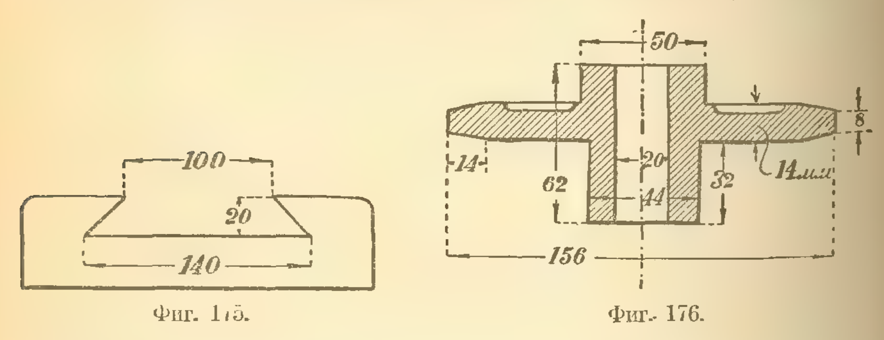
158. Постройте угол в 14° 30' посредством его тангенса.



Фиг. 174.

159. На фиг. 175 показан паз; определите угол наклона сторон паза к его основанию.

160. На фиг. 176 показано сечение колеса для цепной передачи. Определите угол скоса сторон зубьев по отношению к боковой стороне колеса.



Фиг. 175. Фиг. 176.

161. Коническая шестерня диаметром в 200 мм. имеет угол наклона для зубьев 58°. Определите угол наклона и диаметр другой конической шестерни, сцепляющейся с первой и насаженной на вал под прямым углом к первому валу.

Таблицы тригонометрических функций.

°	′	Sinus	Cosecans	Tangens	Cotangens	Secans	Cosin.	′	°
0	0	.0000	Infinite	.0000	Infinite	1.0000	1.0000	0	90
	10	.0029	343.7752	.0029	343.7737	1.0000	1.0000	50	
	20	.0058	171.8883	.0058	171.8854	1.0000	1.0000	40	
	30	.0087	114.5930	.0087	114.5887	1.0000	1.0000	30	
	40	.0116	85.9456	.0116	85.9398	1.0001	.9999	20	
	50	.0145	68.7574	.0145	68.7501	1.0001	.9999	10	
1	0	.0175	57.2987	.0175	57.2900	1.0002	.9998	0	89
	10	.0204	49.1141	.0204	49.1039	1.0002	.9998	50	
	20	.0233	42.9757	.0233	42.9641	1.0003	.9997	40	
	30	.0262	38.2016	.0262	38.1885	1.0003	.9997	30	
	40	.0291	34.3823	.0291	34.3678	1.0004	.9996	20	
	50	.0320	31.2576	.0320	31.2416	1.0005	.9995	10	
2	0	.0349	28.6537	.0349	28.6363	1.0006	.9994	0	88
	10	.0378	26.4505	.0378	26.4316	1.0007	.9993	50	
	20	.0407	24.5621	.0407	24.5418	1.0008	.9992	40	
	30	.0436	22.9256	.0437	22.9038	1.0009	.9990	30	
	40	.0465	21.4937	.0466	21.4704	1.0011	.9989	20	
	50	.0494	20.2303	0495	20.2056	1.0012	.9988	10	
3	0	.0523	19.1073	.0524	19.0811	1.0014	.9986	0	87
	10	.0552	18.1026	.0553	18.0750	1.0015	.9985	50	
	20	.0581	17.1984	.0582	17.1693	1.0017	.9983	40	
	30	.0610	16.3804	.0612	16.3499	1.0019	.9981	30	
	40	.0640	15.6368	.0641	15.6048	1.0021	.9979	20	
	50	.0669	14.9579	.0670	14.9244	1.0022	.9978	10	
4	0	.0698	14.3356	.0699	1[illegible]3007	1.0024	.9976	0	86
	10	.0727	13.7631	.0729	13.7267	1.0027	.9974	50	
	20	.0756	13.2347	.0758	13.1969	1.0029	.9971	40	
	30	.0785	12.7455	.0787	12.7062	1.0031	.9969	30	
	40	.0814	12.2913	.0816	12.2505	1.0033	.9967	20	
	50	.0843	11.8684	.0846	11.8262	1.0036	.9964	10	85
°	′	Cosin.	Secans	Cotangens	Tangens	Cosecans	Sinus	′	°

°	′	Sinus	Cosecans	Tangens	Cotangens	Secans	Cosin.	′	°
5	0	.0872	11.4737	.0875	11.4301	1.0038	.9962	0	85
	10	.0901	11.1045	.0904	11.0594	1.0041	.9959	50	
	20	.0930	10.7585	.0934	10.7119	1.0044	.9957	40	
	30	.0958	10.4334	.0963	10.3854	1.0046	.9954	30	
	40	.0987	10.1275	.0992	10.0780	1.0049	.9951	20	
	50	.1016	9.8391	.1022	9.7882	1.0052	.9948	10	
6	0	.1045	9.5668	.1051	9.5144	1.0055	.9945	0	84
	10	.1074	9.3092	.1080	9.2553	1.0058	.9942	50	
	20	.1103	9.0652	.1110	9.0098	1.0061	.9939	40	
	30	.1132	8.8337	.1139	8.7769	1.0065	.9936	30	
	40	.1161	8.6138	.1169	8.5555	1.0068	.9932	20	
	50	.1190	8.4046	.1198	8.3450	1.0072	.9929	10	
7	0	.1219	8.2055	.1228	8.1443	1.0075	.9925	0	83
	10	.1248	8.0156	.1257	7.9530	1.0079	.9922	50	
	20	.1276	7.8344	.1287	7.7704	1.0083	.9918	40	
	30	.1305	7.6613	.1317	7.5958	1.0086	.9914	30	
	40	.1334	7.4957	.1346	7.4287	1.0090	.9911	20	
	50	.1363	7.3372	.1376	7.2687	1.0094	.9907	10	
8	0	.1392	7.1843	.1405	7.1154	1.0098	.9903	0	82
	10	.1421	7.0396	.1435	6.9682	1.0102	.9899	50	
	20	.1449	6.8998	.1465	6.8270	1.0107	.9894	40	
	30	.1478	6.6755	.1495	6.6912	1.0111	.9890	30	
	40	.1507	6.6363	.1524	6.5606	1.0116	.9886	20	
	50	.1536	6.5121	.1554	6.4348	1.0120	.9881	10	
9	0	.1564	6.3924	.1584	6.3138	1.0125	.9877	0	81
	10	.1593	6.2772	.1614	6.1970	1.0129	.9872	50	
	20	.1622	6.1661	.1644	6.0844	1.0134	.9868	40	
	30	.1650	6.0589	.1673	5.9758	1.0139	.9863	30	
	40	.1679	5.9554	.1703	5.8708	1.0144	.9858	20	
	50	.1708	5.8554	.1733	5.7694	1.0149	.9853	10	
10	0	.1736	5.7588	.1763	5.6713	1.0154	.9848	0	80
	10	.1765	5.6653	.1793	5.5764	1.0160	.9843	50	
	20	.1794	5.5749	.1823	5.4845	1.0165	.9838	40	
	30	.1822	5.4874	.1853	5.3955	1.0170	.9833	30	
	40	.1851	5.4026	.1884	5.3093	1.0176	.9827	20	
	50	.1880	5.3205	.1914	5.2257	1.0182	.9822	10	79
°	′	Cosin.	Secans	Cotangens	Tangens	Cosecans	Sinus	′	°

°		Sinus	Cosecans	Tangens	Cotangens	Secans	Cosin.	′	°
11	0	1908	5.2408	1944	5.1446	1.0187	.9816	0	79
	10	1937	5.1636	1974	5.0658	1.0193	.9811	50	
	20	1965	5.0886	2004	4.9894	1.0199	.9805	40	
	30	.1994	5.0158	2035	4.9152	1 0205	.9799	30	
	40	2022	4.9452	2065	4.8430	1.0211	.9793	20	
	50	2051	4.8765	2095	4.7729	1.0217	.9787	10	
12	0	2079	4.8097	.2126	4.7046	1.0223	.9781	0	78
	10	.2108	4.7448	.2156	4.6382	1.0230	.9775	50	
	20	.2136	4.6817	.2186	4.5736	1.0236	.9769	40	
	30	.2164	4.6202	.2217	4.5107	1.0243	.9763	30	
	40	.2193	4.5604	.2247	4.4494	1.0249	.9757	20	
	50	2221	4.5022	.2278	4.3897	1.0256	.9750	10	
13	0	2250	4.4454	.2309	4.3315	1.0263	.9744	0	77
	10	.2278	4.3901	.2339	4.2747	1.0270	.9737	50	
	20	2306	4.3362	.2370	4.2193	1.0277	.9730	40	
	30	.2334	4.2837	.2401	4.1653	1.0284	.9724	30	
	40	.2363	4.2324	.2432	4.1126	1.0291	.9717	20	
	50	.2391	4.1824	.2462	4.0611	1.0299	.9710	10	
14	0	.2419	4.1336	.2493	4.0108	1.0306	.9703	0	76
	10	.2447	4.0859	.2524	3.9617	1.0314	.9696	50	
	20	.2476	4 0394	.2555	3.9136	1.0321	.9689	40	
	30	.2504	3.9939	.2586	3.8667	1.0329	.9681	30	
	40	.2532	3.9495	.2617	3.8208	1.0336	.9674	20	
	50	2560	3.9061	.2648	3.7760	1.0345	.9667	10	
15	0	.2588	3.8637	.2679	3.7321	1.0353	.9659	0	75
	10	.2616	3.8222	.2711	3.6891	1.0361	.9652	50	
	20	2644	3.7817	.2742	3.6470	1.0369	.9644	40	
	30	.2672	3.7420	.2773	3.6059	1.0377	.9636	30	
	40	.2700	3.7032	.2805	3.5656	1.0386	.9628	20	
	50	.2728	3.6652	.2836	3.5261	1.0394	.9621	10	
16	0	.2756	3.6280	.2867	3.4874	1.0403	.9613	0	74
	10	.2784	3.5915	.2899	3.4495	1.0412	.9605	50	
	20	.2812	3.5559	.2931	3.4124	1.0421	.9596	40	
	30	.2840	3.5209	.2962	3.3759	1.0430	.9588	30	
	40	.2868	3.4867	.2994	3.3402	1.0439	.9580	20	
	50	.2896	3.4532	.3026	3.3052	1.0448	.9572	10	73
°	′	Cosin.	Secans	Cotangens	Tangens	Cosecans	Sinus	′	°

°	′	Sinus	Cosecans	Tangens	Cotangens	Secans	Cosin.	′	°
17	0	.2924	3.4203	.3057	3.2709	1.0457	.9563	0	73
	10	.2952	3.3881	.3089	3.2371	1.0466	.9555	50	
	20	.2979	3.3565	.3121	3.2041	1.0476	.9546	40	
	30	.3007	3.3255	.3153	3.1716	1.0485	.9537	30	
	40	.3035	3.2951	.3185	3.1397	1.0495	.9528	20	
	50	.3062	3.2653	.3217	3.1084	1.0505	.9520	10	
18	0	.3090	3.2361	.3249	3.0777	1.0515	.9511	0	72
	10	.3118	3.2074	.3281	3.0475	1.0525	.9502	50	
	20	.3145	3.1792	.3314	3.0178	1.0535	.9492	40	
	30	.3173	3.1515	.3346	2.9887	1.0545	.9483	30	
	40	.3201	3.1244	.3378	2.9600	1.0555	.9474	20	
	50	.3228	3.0977	.3411	2.9319	1.0566	.9465	10	
19	0	.3256	3.0716	.3443	2.9042	1.0576	.9455	0	71
	10	.3283	3.0158	.3476	2.8770	1.0587	.9446	50	
	20	.3311	3.0206	.3508	2.8502	1.0598	.9436	40	
	30	.3338	2 9957	.3541	2.8239	1.0609	.9426	30	
	40	.3365	2.9713	.3574	2.7980	1.0620	.9417	20	
	50	.3393	2.9474	.3607	2.7725	1.0631	.9407	10	
20	0	.3420	2.9238	.3640	2.7475	1.0642	.9397	0	70
	10	.3448	2.9006	.3673	2.7223	1.0653	.9387	50	
	20	.3475	2.8779	.3706	2.6985	1.0665	.9377	40	
	30	.3502	2.8555	.3739	2.6746	1.0676	.9367	30	
	40	.3529	2.8334	.3772	2.6511	1.0688	.9357	20	
	55	.3557	2.8117	.3805	2.6279	1.0700	9346	10	
21	0	.3584	2.7904	.3839	2.6051	1.0712	.9336	0	69
	10	.3611	2.7695	.3872	2.5826	1.0724	.9325	50	
	20	.3638	2.7488	.3906	2.5605	1.0736	.9315	40	
	30	.3665	2.7285	.3939	2.5386	1.0748	.9304	30	
	40	.3692	2.7085	.3973	2.5172	1.0760	.9293	20	
	50	.3719	2.6888	.4006	2.4960	1.0773	.9283	10	
22	0	.3746	2.6695	.4040	2.4751	1.0785	.9272	0	68
	10	.3773	2.6504	.4074	2.4545	1.0798	.9261	50	
	20	.3800	2.6316	.4108	2.4342	1.0811	.9250	40	
	30	.3827	2.6131	.4142	2.4142	1.0824	.9239	30	
	40	.3854	2.5949	.4176	2.3945	1.0837	.9228	20	
	50	.3881	2.5770	.4210	2.3750	1.0850	.9216	10	67
°	′	Cosin.	Secans	Cotangens	Tangens	Cosecans	Sinus	′	°

°	′	Sinus	Cosecans	Tangens	Cotangens	Secans	Cosin.	′	°
23	0	.3907	2.5593	.4245	2.3559	1.0864	.9205	0	67
	10	.3934	2.5419	.4279	2.3369	1.0877	.9194	50	
	20	.3961	2.5247	.4314	2.3183	1.0891	.9182	40	
	30	.3987	2.5078	.4348	2.2998	1.0904	.9171	30	
	40	.4014	2.4912	.4383	2.2817	1.0918	.9159	20	
	50	.4041	2.4748	.4417	2.2637	1.0932	.9147	10	
24	0	.4067	2.4586	.4452	2.2460	1.0946	.9135	0	66
	10	.4094	2.44 6	.4487	2.2286	1.0961	.9124	50	
	20	.4120	2.4269	.4522	2.2113	1.0975	.9112	40	
	30	.4147	2.4114	.4557	2.1943	1.09 0	.9100	30	
	40	.4173	2.3961	.4592	2.1775	1.10 4	.9088	20	
	50	.4200	2.3811	.4628	2.1609	1.1019	.9075	10	
25	0	.4226	2.3662	.4663	2.1445	1.1034	.9063	0	65
	10	.4253	2.3515	.4699	2.1283	1.1049	.9051	50	
	20	.4279	2.3371	.4734	2.1123	1.1064	.9 38	40	
	30	.4305	2.3228	.4770	2.0965	1.1079	.9026	30	
	40	.4331	2.3088	.4806	2.0809	1.1095	.9013	20	
	50	.4358	2.2949	.4811	2.0655	1.1110	.9001	10	
26	0	.4388	2.2812	.4877	2.0503	1.1126	.8988	0	64
	10	.4110	2.2677	.4913	2.0353	1.1142	.8975	50	
	20	.4436	2.2543	.4950	2.0204	1.1158	.8962	40	
	30	.4162	2.2412	.4986	2.0057	1.1174	.8949	30	
	40	.4488	2.2282	.5022	1.9912	1.1190	.8936	20	
	50	.4514	2.2153	.5059	1.9769	1.1207	.8923	10	
27	0	.4540	2.2027	.5095	1.9626	1.1223	.8910	0	63
	10	.4566	2.1902	.5132	1.9486	1.1240	.8897	50	
	20	.4592	2.1779	.5169	1.9347	1.1257	.8884	40	
	30	.4617	2.1657	.5206	1.9210	1.1274	.8870	30	
	40	.4643	2.1537	.5243	1.9074	1.1291	.8857	20	
	50	.4669	2.1418	.5280	1.8940	1.1308	.8843	10	
28	0	.4695	2.1301	.5317	1.8807	1.1326	.8829	0	62
	10	.4720	2.1185	.5355	1.8676	1.1343	.8816	50	
	20	.4746	2.1070	.5392	1.8546	1.1361	.8802	40	
	30	.4772	2.0957	.5430	1.8417	1.1379	.8788	30	
	40	.4797	2.0846	.5467	1.8291	1.1397	.8774	20	
	50	.4823	2.0736	.5505	1.8165	1.1415	.8760	10	61
°	′	Cosin.	Secans	Cotangens	Tangens	Cosecans	Sinus	′	°

°	′	Sinus	Cosecans	Tangens	Cotangens	Secans	Cosin.		°
29	0	.4848	2.0627	.5543	1.8040	1.1434	.8746	0	61
	10	.4874	2.0519	.5581	1.7917	1.1452	.8732	50	
	20	.4899	2.0413	.5619	1.7796	1.1471	.8718	40	
	30	4924	2.0308	.5658	1.7675	1.1490	.8704	30	
	40	4950	2.0204	.5696	1.7556	1.1509	.8689	20	
	50	4975	2.0101	.5735	1.7437	1.1528	.8675	10	
30	0	.5000	2.0000	.5774	1.7321	1.1547	.8660	0	60
	10	.5025	1.9900	.5812	1.7205	1.1567	.8646	50	
	20	.5050	1.9801	.5851	1.7090	1.1586	.8631	40	
	30	.5075	1.9703	.5890	1.6977	1.1606	.8616	30	
	40	.5100	1.9606	.5930	1.6864	1.1626	.8601	20	
	50	.5125	1.9511	.5969	1.6753	1.1646	.8587	10	
31	0	.5150	1.9416	.6009	1.6643	1.1666	.8572	0	59
	10	.5175	1.9323	.6048	1.6534	1.1687	.8557	50	
	20	.5200	1.9230	.6088	1.6426	1.1708	.8542	40	
	30	.5225	1.9139	.6128	1.6319	1.1728	.8526	30	
	40	.5250	1.9048	.6168	1.6212	1.1749	.8511	20	
	50	.5275	1.8959	.6208	1.6107	1.1770	.8496	10	
32	0	.5299	1.8871	.6249	1.6003	1.1792	.8480	0	58
	10	.5324	1.8783	.6289	1.5900	1.1813	.8465	50	
	20	.5348	1.8697	.6330	1.5798	1.1835	.8450	40	
	30	.5373	1.8612	.6371	1.5697	1.1857	.8434	30	
	40	.5398	1.8527	.6412	1.5597	1.1879	.8418	20	
	50	.5422	1.8443	.6453	1.5497	1.1901	.8403	10	
33	0	.5446	1.8361	.6494	1.5399	1.1924	.8387	0	57
	10	.5471	1.8279	.6535	1.5301	1.1946	.8371	50	
	20	.5495	1.8198	.6577	1.5204	1.1969	.8355	40	
	30	.5519	1.8118	.6619	1.5108	1.1992	.8339	30	
	40	.5544	1.8039	.6661	1.5013	1.2015	.8323	20	
	50	.5568	1.7960	.6703	1.4919	1.2039	.8307	10	
34	0	.5592	1.7883	.6745	1.4826	1.2062	.8290	0	56
	10	.5616	1.7806	.6787	1.4733	1.2086	.8274	50	
	20	.5640	1.7730	.6830	1.4641	1.2110	.8258	40	
	30	.5664	1.7655	.6873	1.4550	1.2134	.8241	30	
	40	.5688	1.7581	.6916	1.4460	1.2158	.8225	20	
	50	.5712	1.7507	.6959	1.4370	1.2183	.8208	10	55
°	′	Cosin.	Secans	Cotangens	Tangens	Cosecans	Sinus	′	°

°	'	Sinus	Cosecans	Tangens	Cotangens	Secans	Cosin	'	°
35	0	.5736	1.7434	.7002	1.4281	1.2208	.8192	0	55
	10	.5760	1.7362	.7046	1.4193	1.2233	.8175	50	
	20	.5783	1.7291	.7089	1.4106	1.2258	.8158	40	
	30	.5807	1.7221	.7133	1.4019	1.2283	.8141	30	
	40	.5831	1.7151	.7177	1.3934	1.2309	.8124	20	
	50	.5854	1.7081	.7221	1.3848	1.2335	.8107	10	
36	0	.5878	1.7013	.7265	1.3764	1.2361	.8090	0	54
	10	.5901	1.6945	.7310	1.3680	1.2387	.8073	50	
	20	.5925	1.6878	.7355	1.3597	1.2413	.8056	40	
	30	.5948	1.6812	.7400	1.3514	1.2440	.8039	30	
	40	.5972	1.6746	.7445	1.3432	1.2467	.8021	20	
	50	.5995	1.6681	.7490	1.3351	1.2494	.8004	10	
37	0	.6018	1.6616	.7536	1.3270	1.2521	.7986	0	53
	10	.6041	1.6553	.7581	1.3190	1.2549	.7969	50	
	20	.6065	1.6489	.7627	1.3111	1.2577	.7951	40	
	30	.6088	1.6427	.7676	1.3032	1.2605	.7934	30	
	40	.6111	1.6365	.7720	1.2954	1.2633	.7916	20	
	50	.6134	1.6303	.7766	1.2876	1.2662	.7898	10	
38	0	.6157	1.6243	.7813	1.2799	1.2690	.7880	0	52
	10	.6180	1.6183	.7860	1.2723	1.2719	.7862	50	
	20	.6202	1.6123	.7907	1.2647	1.2743	.7844	40	
	30	.6225	1.6064	.7954	1.2572	1.2778	.7826	30	
	40	.6248	1.6005	.8002	1.2497	1.2808	.7808	20	
	50	.6271	1.5948	.8041	1.2423	1.2837	.7790	10	
39	0	.6293	1.5890	.8098	1.2349	1.2868	.7771	0	51
	10	.6316	1.5833	.8146	1.2276	1.2898	.7753	50	
	20	.6338	1.5777	.8195	1.2203	1.2929	.7735	40	
	30	.6361	1.5721	.8243	1.2131	1.2960	.7716	30	
	40	.6383	1.5666	.8292	1.2059	1.2991	.7698	20	
	50	.6406	1.5611	.8342	1.1988	1.3022	.7679	10	
40	0	.6428	1.5557	.8391	1.1918	1.3054	.7660	0	50
	10	.6450	1.5504	.8441	1.1847	1.3086	.7642	50	
	20	.6472	1.5450	.8491	1.1778	1.3118	.7623	40	
	30	.6494	1.5398	.8541	1.1708	1.3151	.7604	30	
	40	.6517	1.5345	.8591	1.1640	1.3184	.7585	20	
	50	.6539	1.5294	.8642	1.1571	1.3217	.7566	10	49
°	'	Cosin	Secans	Cotangens	Tangens	Cosecans	Sinus	'	°

°	′	Sinus	Cosecans	Tangens	Cotangens	Secans	Cosin.	′	°
41	0	.6561	1.5243	.8693	1.1504	1.3250	.7547	0	49
	10	.6583	1.5192	.8744	1.1436	1.3284	.7528	50	
	20	.6604	1.5141	.8796	1.1369	1.3318	.7509	40	
	30	.6626	1.5092	.8847	1.1303	1.3352	.7490	30	
	40	.6648	1.5042	.8899	1.1237	1.3386	.7470	20	
	50	.6670	1.4993	.8952	1.1171	1.3421	.7451	10	
42	0	.6691	1.4945	.9004	1.1106	1.3456	.7431	0	48
	10	.6713	1.4897	.9057	1.1041	1.3492	.7412	50	
	20	.6734	1.4849	.9110	1.0977	1.3527	.7392	40	
	30	.6756	1.4802	.9163	1.0913	1.3563	.7373	30	
	40	.6777	1.4755	.9217	1.0850	1.3600	.7353	20	
	50	.6799	1.4709	.9271	1.0786	1.3636	.7333	10	
43	0	.6820	1.4663	.9325	1.0724	1.3673	.7314	0	47
	10	.6841	1.4617	.9380	1.0661	1.3711	.7294	50	
	20	.6862	1.4572	.9435	1.0599	1.3748	.7274	40	
	30	.6884	1.4527	.9490	1.0538	1.3786	.7254	30	
	40	.6905	1.4483	.9545	1.0477	1.3824	.7234	20	
	50	.6926	1.4439	.9501	1.0416	1.3863	.7214	10	
44	0	.6947	1.4396	.9657	1.0355	1.3902	.7193	0	46
	10	.6967	1.4352	.9713	1.0295	1.3941	.7173	50	
	20	.6988	1.4310	.9770	1.0235	1.3980	.7153	40	
	30	.7009	1.4267	.9827	1.0176	1.4020	.7133	30	
	40	.7030	1.4225	.9884	1.0117	1.4061	.7112	20	
	50	.7050	1.4183	.9942	1.0058	1.4101	.7092	10	
45	0	.7071	1.4142	1.0000	1.0000	1.4142	.7071	0	45
°	′	Cosin.	Secans	Cotangens	Tangens	Cosecans	Sinus	′	°

ГЛАВА XV.

Практические вычисления с применением тангенсов и котангенсов.

§ 107. Вычисление высот и расстояний.

Ширина реки, высота трубы и вообще всякая длина, которую трудно измерить непосредственно, может быть определена посредством небольшого вычисления с применением тригонометрических величин.

Вычислим расстояние между двумя точками B и C, находящимися по обе стороны реки (фиг. 177).

Фиг. 177.

Посредством угломера мы восставляем в C перпендикуляр к направлению BC и откладываем произвольную длину CA вдоль этого перпендикуляра. Мы получаем прямоугольный треугольник BCA, у которого катет CA нам известен, а угол A может быть определен угломером.

В прямоугольном треугольнике BCA тангенс угла BAC равен отношению противолежащего катета к прилежащему; следовательно:

$$\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A;$$

откуда мы имеем:

$$BC = AC \times \operatorname{tg} A.$$

Пример. Через реку строится мост, крайние устои которого должны быть в точках B и C (фиг. 177). Для измерения рас-

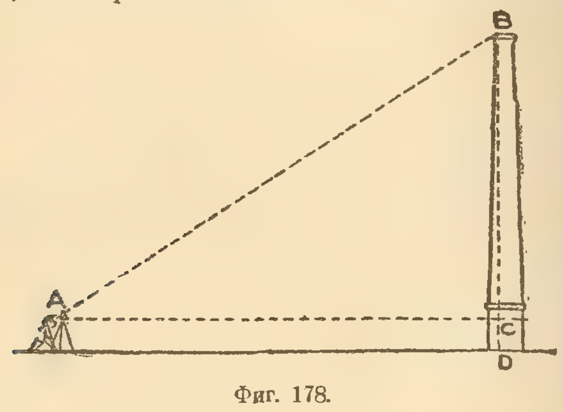
стояния BC отложим по перпендикуляру к направлению BC расстояние CA в 180 метров. Угломером определим угол BAC, равный $37° 20'$; каково расстояние между крайними точками моста?

$$BC = 180 \times \operatorname{tg} 37° 20';$$

$$\operatorname{tg} 37° 20' = 0{,}7627\cdot$$

$$BC = 180 \times 0{,}7627 = 137{,}3 \text{ метра.}$$

Подобным образом можно определить высоту какого-нибудь предмета, напр., трубы BD (фиг. 178); разница заключается лишь в том, что угол измеряется не в горизонтальной плоскости как раньше, а в вертикальной.



Фиг. 178.

Отмерим от трубы горизонтальное расстояние DA произвольной длины, затем определим угол BAC (линия AC — горизонтальна, а B — вершина трубы). Мы имеем:

$$BC = AC \times \operatorname{tg} A,$$

следовательно, $BD = BC + CD = AC \times \operatorname{tg} A +$ высота прибора.

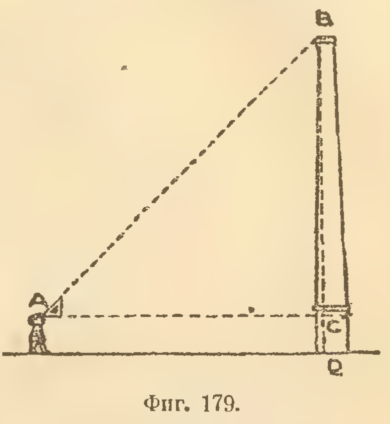
Пример. На расстоянии 60 метров от трубы угол возвышения BAC оказался равным $20°$; высота угломера $1^1/_2$ метра. Определите высоту трубы.

$$BC = 60 \times \operatorname{tg} 20°;$$

$$\operatorname{tg} 20° = 0{,}3640;$$

$$BD = 60 \times 0{,}3640 + 1{,}5 = 23{,}3 \text{ метра.}$$

За неимением угломера можно воспользоваться простым чертежным угольником. Отойдите от трубы на некоторое расстояние (фиг. 179) и, держа один из катетов угольника горизонтально, смотрите вдоль гипотенузы на трубу; отходите пока луч зрения не пройдет как раз через вершину трубы. Зная угол вашего чертежного угольника, следовательно, и тангенс этого угла, расстояние, на которое вы отошли от трубы, и высоту вашего глаза над землей, вы определите высоту трубы, а именно:



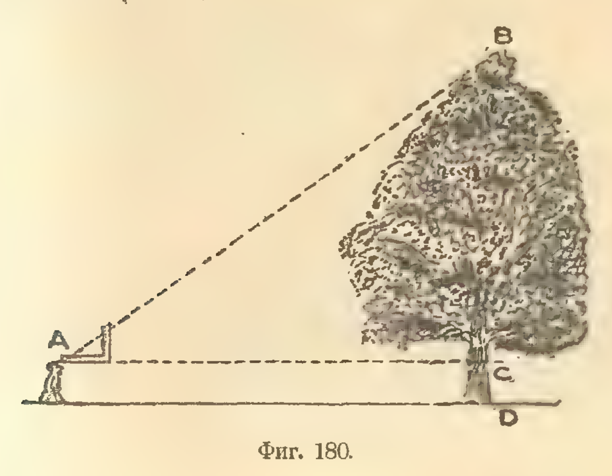
Фиг. 179.

$$BD = AC \times \operatorname{tg} A + CD.$$

Если наш угольник имеет 45°, то tg $A = 1$, следовательно:

$$BD = AC + CD.$$

Вы можете также воспользоваться стальным наугольником, как показано на фиг. 180.



Фиг. 180.

Отходите от измеряемого предмета, напр., дерева, до тех пор, пока луч зрения, идущий через оба конца наугольника,

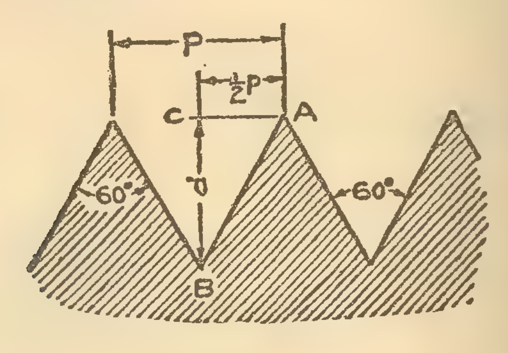
одну из сторон которого вы держите горизонтально, не пройдет через верхушку дерева.

Отношение, которое существует между вертикальной и горизонтальной стороной наугольника, будет таковым же, как и между высотою предмета, за вычетом высоты глаза наблюдателя, и отмеренным от предмета до наблюдателя расстоянием; отношение это и есть тангенс угла зрения, а поэтому высота предмета определяется простым вычислением.

§ 108. Размеры винтовых нарезок в форме V.

Когда говорят о винтовых нарезках, называют число ниток в дюйме; шагом винта называется обратная величина. Так, если винт имеет 8 ниток в дюйме, его шаг будет $\frac{1}{8}$ дм.

На фиг. 181 изображена нарезка в форме V с шагом, обозначенным буквою p, и глубиною нарезки d. Угол нарезки равен 60°, а поэтому каждый выступ и впадина б д т равносторонними треугольниками.



Фиг. 181.

В прямоугольном треугольнике ABC угол $ABC = 30°$ или половине полного угла в 60°, а противолежащий катет $AC = \frac{1}{2}\,p$, т. е. половине шага; прилежащий катет $BC = d$ равен глубине нарезки;

$$\operatorname{ctg} ABC = \frac{BC}{AC} = \frac{d}{0{,}5\,p};$$

следовательно: $d = 0{,}5\,p \times \operatorname{ctg} 30° = 0{,}5\,p \times 1{,}732$,

или $d = 0{,}866\,p$.

Глубину нарезки d можно найти, пользуясь теоремой Пифагора. Из треугольника ABC имеем:

$$d^2 = p^2 - \frac{p^2}{4} = \frac{3}{4}p^2;$$

отсюда:

$$d = \frac{p\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}732}{2}p = 0{,}866\,p.$$

Если мы назовем наружный диаметр нарезки через D, а внутренний, т.-е. диаметр у основания нарезки, через D_1, то последний будет меньше первого на удвоенную глубину нарезки, т.-е.

$$D_1 = D - 2\,d.$$

Подставляем вместо d его выражение через шаг:

$$D_1 = D - 2 \times 0{,}866\,p = D - 1{,}732\,p.$$

Обыкновенно вместо шага p говорят о числе ниток в дюйме N, и так как:

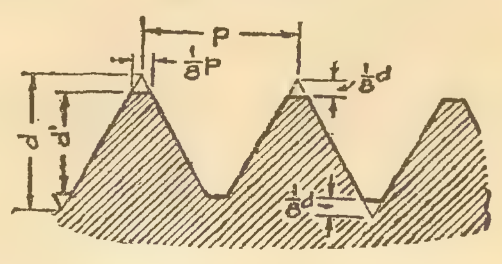
$$p = \frac{1}{N},$$

то, следовательно:

$$D_1 = D - \frac{1{,}732}{N}.$$

§ 109. Размеры нормальных американских нарезок.

В американском машиностроении чаще всего употребляются нарезки, отличающиеся от только что рассмотренных тем, что равносторонние треугольники (сечения выступов и впадин) имеют срезанные вершины (фиг. 182) на одну восьмую часть полной высоты V-образной нарезки. Если мы назовем через d' глубину усеченной нарезки, а через d глубину остроугольной нарезки, то:



Фиг. 182.

$$d' = d - 2 \times \frac{1}{8}d = \frac{3}{4}d.$$

Благодаря этому срезу, придающему нарезке прочность, ширина площадок у выступов и у впадин получается равной одной восьмой части шага ($\frac{1}{8}p$).

Зависимость между глубиной американской нарезки d' и ее шагом p получается очень просто, стоит только подставить вместо d в формуле

$$d' = \frac{3}{4} d$$

выведенную раньше зависимость:

$$d = 0{,}866\, p,$$

тогда $$d' = \frac{3}{4} \times 0{,}866\, p = 0{,}65\, p;$$

а так как $$p = \frac{1}{N},$$

то, следовательно: $$d' = \frac{0{,}65}{N}.$$

Для вычисления внутреннего диаметра нарезки D_1 мы имеем, как и раньше, с заменою лишь d через d':

$$D_1 = D - 2\,d'$$

поэтому

$$D_1 = D - 2 \times 0{,}65\, p = D - 1{,}3\, p,$$

или

$$D_1 = D - \frac{1{,}3}{N}$$

Пример. Определите глубину американской нарезки, имеющей 8 ниток в дюйме, а также внутренний диаметр этой нарезки, если наружный диаметр ее = 1 дм.

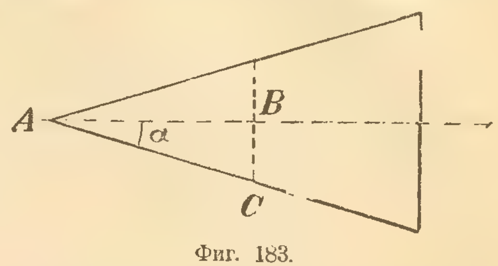
$$d' = \frac{0{,}65}{N} = \frac{0{,}65}{8} = 0{,}081 \text{ дм.};$$

$$D_1 = D - \frac{1{,}3}{N} = 1 - \frac{1{,}3}{8} = 0{,}8375 \text{ дм.}$$

§ 110. Конусность и получение конусных поверхностей.

Если мы имеем коническую поверхность (фиг. 183), то величину наклона образующих, или угол их схождения, можно выразить двумя способами. Во-первых, можно указать в угловых

мерах величину половины угла между образующими, т.-е. угол α между образующей конуса и его осью. Во-вторых, при расчетах, связанных с выделкою конусов в мастерских, наклон образующих характеризуется особой величиною, называемой конусностью.



Фиг. 183.

Конусностью называется тангенс угла α между образующей и осью конуса. Связь между обоими способами очень проста: конусность $=\operatorname{tg}\alpha$. Для конуса, изображенного на фиг. 183, конусность равна $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AB}$.

Так как конусность равна тангенсу угла, то она является отвлеченным числом, и для углов меньше 45° конусность меньше единицы; напр., конусность, равная $\frac{1}{10}$, показывает, что угол $\alpha=5^\circ 43'$. На фиг. 184 изображен усеченный конус, имеющий у правого широкого конца диаметр $D=100$ мм., у левого узкого конца диаметр $d=75$ мм. и длину оси (высоту) $L=200$ мм.

Фиг. 184.

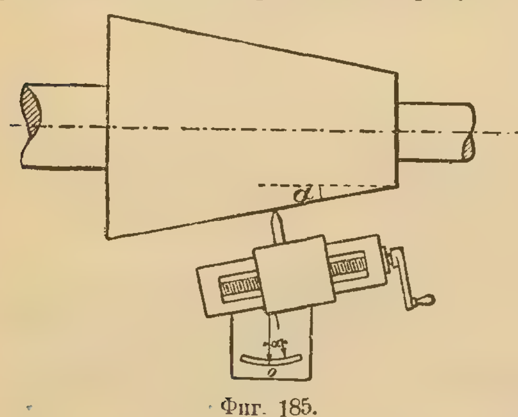
Из треугольника ABC имеем, что конусность данного конуса равна:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{1}{2}(D-d)}{L}=\frac{R-r}{L},$$

т.-е. конусность усеченного конуса равна разности радиусов оснований, деленной на длину оси конуса. В данном примере конусность равна $\frac{25}{400}=0{,}0625$, угол $\alpha=3^\circ 34'$.

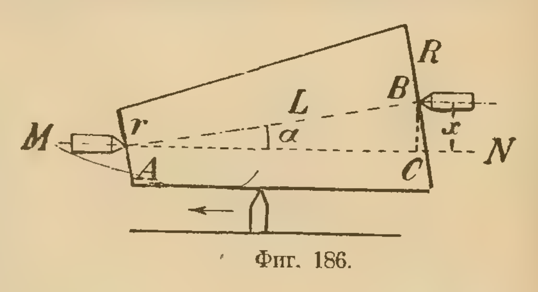
Таким образом, зная линейные размеры усеченного конуса, легко найти его конусность, а зная конусность, по таблице тангенсов можно определить величину угла между образующей и осью конуса.

Чтобы выточить на токарном станке конус, имеющий данную конусность, можно повернуть верхнюю каретку суппорта на угол a, тангенс которого равен требуемой конусности (фиг. 185); при таком повороте резец будет двигаться не параллельно оси обтачиваемого предмета, а будет итти по прямой, образующей с этой осью угол a, и потому выточит конус с требуемой конусностью.



Фиг. 185.

Можно также сдвинуть заднюю бабку токарного станка так, чтобы задний центр отодвинулся от оси станка на определенное расстояние x; тогда при движении резца параллельно оси станка резец обточит конус, у которого конусность равна отношению расстояния x к расстоянию AC между центрами, считаемому параллельно оси станка MN (фиг. 186). Поэтому для вытачивания конуса нужен сдвиг задней бабки, равный расстоянию AC, умноженному на конусность. Отсюда понятно, почему в мастерских применяют величину, называемую конусностью.



Фиг. 186.

Пример. Пусть дан предмет длиною 355 мм., конусность которого 0,125. Определить угол между образующими у вершины конуса.

Угол a между образующей и осью конуса найдем по таблице, как угол, тангенс которого равен 0,125. Угол $a = 7° 7\frac{1}{2}'$. Отсюда искомый угол будет $14° 15'$.

Пример. Пусть требуется выточить усеченный конус (фиг. 186) высотою L с радиусами оснований R и r, т.-е. с конусностью

$$k = \operatorname{tg} a = \frac{R-r}{L}.$$

Для этого нужно заднюю бабку сдвинуть по направлению, перпендикулярному к оси станка MN, на такое расстояние x, чтобы образующая обтачиваемого конуса оказалась параллельной оси MN, т.-е. параллельной движению резца. Из прямоугольного треугольника ABC, где $AB = L$, $BC = x$, имеем:

$$\frac{x}{AC} = \operatorname{tg} a = k \text{ и } AC^2 + x^2 = L^2;$$

определяем из первого равенства $AC = \frac{x}{k}$ и подставляем во второе.

$$\frac{x^2}{k^2} + x^2 = L^2;$$

откуда

$$x^2 = \frac{L^2 k^2}{1+k^2};$$

следовательно:

$$x = \frac{L.k}{\sqrt{1+k^2}}; \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

Подставляем вместо k его выражение $\frac{R-r}{L}$, получаем:

$$x = \frac{L(R-r)}{\sqrt{L^2+(R-r)^2}}. \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

Если задана конусность, то придется применить первую формулу; если даны радиусы конуса, то надо воспользоваться второй формулой.

Для данных: $L = 180$ мм., $R = 50$ мм. и $r = 20$ мм. находим:

$$x = \frac{180(50-20)}{\sqrt{180^2+(50-20)^2}} = 29{,}7 \text{ мм.}$$

В данном примере $k = \frac{1}{6}$. При малом значении конусности можно в формуле (1) отбросить очень малую величину k^2, и тогда останется выражение: $x = Lk = R - r$. Отсюда для приведенного примера x получается равным 30 вместо ранее найденного 29,7.

§ 111. Круговые функции.

Нам приходится часто встречаться с выражениями, подобными следующим: это есть угол, тангенс которого равен тому-то, или котангенс которого равен тому-то. Вместо этих фраз говорят также:

арктангенс такой-то равен такому-то углу и
арккотангенс такой-то равен такому-то углу.

Эти функции называются круговыми, и они являются обратными, по отношению к тангенсу и котангенсу.

Допустим, что мы ищем угол, тангенс которого равен $\frac{1}{8}$; такой угол равен $7^\circ 7^1/_2{}'$. Мы можем изобразить это следующим образом:

$$\text{arctg}\,\frac{1}{8} = 7^\circ 7\tfrac{1}{2}'.$$

Или мы можем искать угол, котангенс которого равен 8; это тот же угол в $7^\circ\ 7\frac{1}{2}'$; мы напишем это следующим образом:

$$\text{arcctg}\,8 = 7^\circ 7\tfrac{1}{2}'.$$

Обе функции — обратные, тогда как прямые функции были бы:

$$\text{tg}\,7^\circ 7\tfrac{1}{2}' = \tfrac{1}{8};$$

$$\text{ctg}\,7^\circ 7\tfrac{1}{2}' = 8.$$

Если мы имеем выражение:

$$2\ \text{arctg}\ 1 = 90^\circ,$$

то оно читается:

двойной угол, тангенс которого единица, $= 90^\circ$.

Прямая функция была бы:

тангенс половины $90^\circ =$ единице, т.-е.

$$\text{tg}\,45^\circ = 1.$$

Следовательно, если встречаются выражения arctg и arcctg, то достаточно заменить их словами: угол, тангенс которого, или угол, котангенс которого.

Задачи.

162. На расстоянии 90 метров от трубы при высоте угломера $1^1/_2$ метра, угол возвышения равен 30°. Какова высота трубы?

163. На расстоянии в 8 километров от горы угол возвышения угломера равен 12°. Какова высота горы?

164. Какова ширина реки (фиг. 177), если база $AC = 180$ метрам, а угол $BAC = 42°$?

165. Каков внутренний диаметр нарезки болта с наружным диаметром в $\frac{3}{4}$ дм., при десяти нитках в дюйме и при американской нарезке?

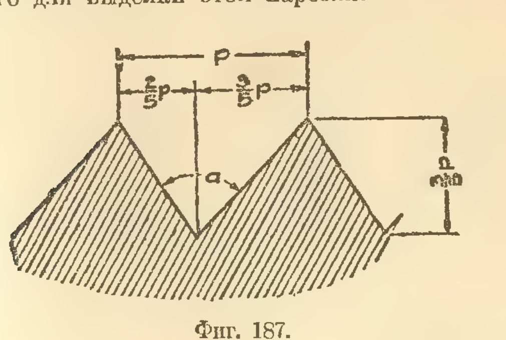
166. Какова ширина площадки американского винта, имеющего 4 нитки в дюйме?

167. Сколько градусов и минут в угле 3 arctg 0,25?

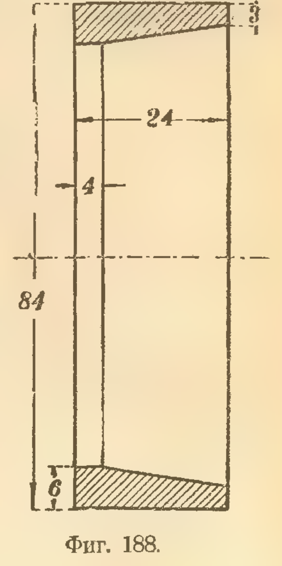
168. Конусная шпилька длиною в 120 мм. имеет большой диаметр = 12,6 мм. и малый диаметр = 10,2 мм. Чему равна конусность?

169. Конусная развертка должна служить для дыр с конусностью в $\frac{1}{50}$ (для так наз. „контрольных" шпилек). Диаметр тонкого конца развертки 15 мм., а диаметр толстого конца 18 мм. Чему равно расстояние между обоими концами? Определите также угол между образующими развертки.

170. На фиг. 187 показана специальная винтовая нарезка для пушечных замков. Вычислите угол для заточки резца, служащего для выделки этой нарезки.



Фиг. 187.



Фиг. 188.

171. На фиг. 188 показана обойма для конусных роликовых подшипников. Определите конусность внутренних стенок.

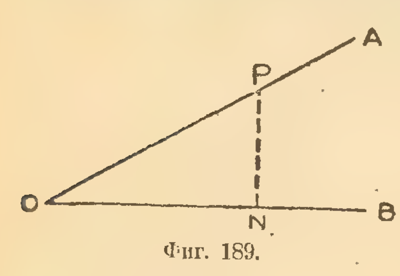
ГЛАВА XVI.

Синус, косинус, секанс и косеканс.

§ 112. Синус.

Таблицы тригонометрических функций, кроме столбцов, озаглавленных: tangens и cotangens (5-ый и 6-ой), имеют еще четыре столбца (3-ий, 4-ый, 7-ой и 8-ой), озаглавленных, соответственно, читая сверху: sinus, cosecans, secans и cosinus. По-русски эти названия читаются: синус, косеканс, секанс и косинус. Идя снизу, эти названия написаны в обратном порядке. Об этих новых тригонометрических функциях и об их применении на практике мы поговорим в этой главе, начав с синуса (sin — сокращенно).

На фиг. 189 показан угол AOB и перпендикуляр PN, опущенный из точки P на наклонной стороне OA на горизонтальную сторону угла.



Фиг. 189.

В прямоугольном треугольнике OPN отношение противолежащей стороны PN к прилежащей ON есть тангенс угла $PON = AOB = \angle O$. Синусом (sin) угла PON называется отношение противолежащей стороны PN к гипотенузе OP. Разница синуса от тангенса в том, что в знаменателе вместо ON берется OP.

Итак:

$$\sin PON = \frac{PN}{OP},$$

$$\operatorname{tg} PON = \frac{PN}{ON}.$$

Так как в числителе находится одна и та же величина PN, то из обеих дробей больше та, у которой знаменатель меньше. У синуса в знаменателе гипотенуза, а у тангенса — прилежащий катет; так как катет всегда меньше гипотенузы, то, следовательно, тангенс угла всегда больше синуса этого угла.

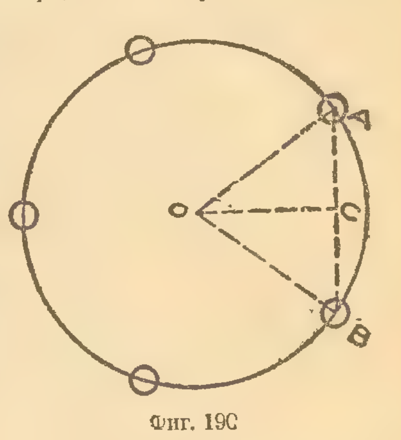
Величина синусов различных углов от 0° до 45° отыскивается в таблице подобно тому, как это было объяснено для тангенсов тех же углов, при чем пользуются 3-им столбцом вместо 5-го.

Для углов от 45° до 90° пользуются 8-м столбцом, согласно с заголовком sinus — внизу.

Синусы всех углов находятся в пределах от нуля до единицы.

Пример 1. На фиг. 190 показан круг диаметром 20 см.; круг этот требуется разделить на 5 частей для разметки центров пяти отверстий. Вычислить величину раскрытия циркуля AB.

Соединим A с B и опустим перпендикуляр OC, который делит сторону AB и угол AOB пополам. Угол AOB есть пятая часть окружности, т.-е.



Фиг. 190

$$\frac{360}{5} = 72°.$$

Угол AOC есть половина этого угла или 36°. Длина радиуса круга 10 см. В прямоугольном треугольнике AOC:

$$\sin AOC = \frac{AC}{OA},$$

т.-е.

$$\sin 36° = \frac{AC}{10},$$

откуда

$$AC = 10 \sin 36°.$$

Из таблиц находим:

$$\sin 36° = 0{,}5878,$$

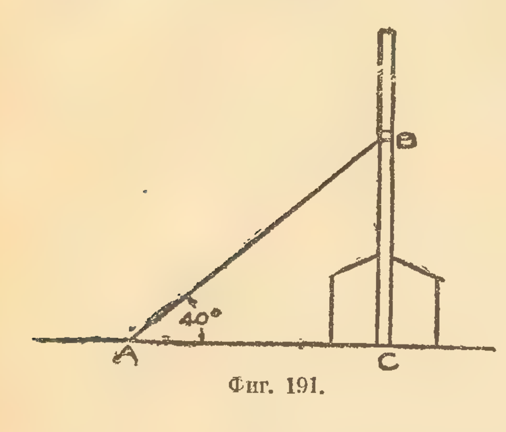
следовательно,

$$AC = 10 \times 0{,}5878 = 5{,}878$$

и

$$AB = 2\,AC = 11{,}756 \text{ см.}$$

Пример 2. На фиг. 191 показана железная труба высотою 18 метров, поддерживаемая железными тросами, подобными AB. Тросы прикреплены к трубе на высоте в две трети от полной высоты и образуют с грунтом угол в 40°. Определите длину этих тросов.



Фиг. 191.

Нам надо определить AB, а известны: BC и угол BAC.

$$\sin BAC = \frac{BC}{AB};$$

$$AB = \frac{BC}{\sin 40^\circ};$$

$$BC = \tfrac{2}{3} \times 18 = 12;$$

$$\sin 40^\circ = 0{,}6429;$$

$$AB = \frac{12}{0{,}6429} = 18{,}66 \text{ метра.}$$

К этой длине надо добавить запас на скрепление.

§ 113. Косинус.

Во всяком прямоугольном треугольнике (фиг. 189) отношение прилежащей стороны к гипотенузе называется косинусом:

$$\cos PON = \frac{ON}{OP}.$$

В этом же треугольнике сторона ON является противолежащей стороной для угла OPN; следовательно,

$$\sin OPN = \frac{ON}{OP} = \cos PON.$$

Углы OPN и PON дополняют друг друга до 90°; поэтому синусы и косинусы таких углов равны, т.-е. $\sin OPN$ равняется $\cos PON$.

Чем больше угол, тем меньше его косинус.

Косинус изменяется от единицы до нуля.

Косинус отыскивается в таблице подобно синусу.

Пример. На фиг. 192 показан восьмиугольник, вписанный в круг. Пусть это будет сечение бруска, который желают выфрезеровать из круглого прута диаметром 50 мм. Определить размер DC и длину стороны AB.

В прямоугольном треугольнике AOC:

$$\cos AOC = \frac{OC}{OA},$$

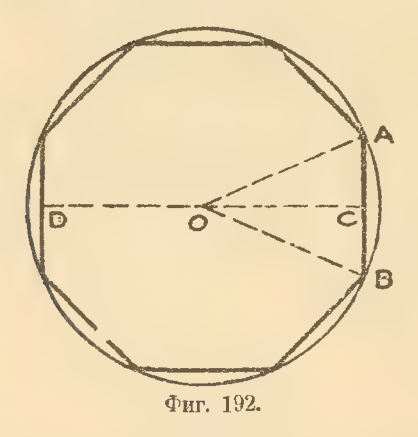
и

$$\sin AOC = \frac{AC}{OA};$$

следовательно, $$OC = OA \cos AOC,$$

и

$$AC = OA \sin AOC.$$



Фиг. 192.

Радиус $OA = 25$ мм., а угол AOC есть половина угла восьмиугольника, т.-е. шестнадцатая часть окружности или $22\frac{1}{2}°$.

Из таблиц:

$$\cos 22° \; 30' = 0{,}9239$$

и

$$\sin 22° \; 30' = 0{,}3827.$$

Следовательно:

$$OC = 25 \times 0{,}9239$$

и

$$AC = 25 \times 0{,}3827.$$

Но мы ищем DC и AB, которые будут соответственно в два раза больше OC и AC:

$$DC = 2\ OC = 50 \times 0{,}9239 = 46{,}2 \text{ мм.}$$

$$AB = 2\ AC = 50 \times 0{,}3827 = 19{,}1 \text{ мм.}$$

§ 114. Секанс.

Секансом называется величина, обратная косинусу. В прямоугольном треугольнике PON (фиг. 189):

$$\sec \widehat{PON} = \frac{OP}{ON} = \frac{1}{\cos \widehat{PON}}.$$

Очевидно, что там, где пришлось бы разделить на косинус, мы можем помножить на соответствующий секанс, что несколько проще.

Секанс получается из таблиц подобно другим функциям; он изменяется от единицы до бесконечности.

Пример. Каков наименьший диаметр прута, из которого можно выфрезеровать брус восьмиугольного сечения с поперечным размером в 38 мм. (фиг. 192)?

Ищется наружный диаметр, т.-е. $2\,OA$, а данным является диаметр внутренний, т.-е. $DC = 2\ OC$.

В прямоугольном треугольнике AOC:

$$\sec AOC = \frac{OA}{OC};$$

откуда

$$OA = OC \sec AOC;$$

при чем

$$OC = 19 \text{ мм.},$$

а угол

$$AOC = 22^\circ\ 30'.$$

Из таблицы мы имеем:

$$\sec 22^\circ\ 30' = 1{,}0818;$$

следовательно:

$$OA = 19 \times 1{,}0818 = 20{,}5542,$$

т.-е. искомый диаметр будет:

$$2\,OA = 41{,}1084, \text{ т.-е. почти } 41{,}1 \text{ мм.}$$

§ 115. Косеканс.

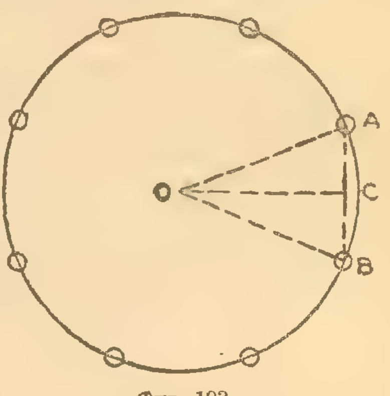
Последней тригонометрической функцией является косеканс (cosec), величина обратная синусу и равная отношению гипотенузы к противолежащей стороне.

Обращаясь вновь к фиг. 189 имеем:

$$\text{cosec } PON = \frac{OP}{PN} = \frac{1}{\sin PON}.$$

Косеканс угла PON будет, очевидно, секансом дополнительного (до 90°) угла OPN, а секанс угла PON будет косекансом угла OPN.

Косеканс определяется из таблиц подобно другим тригонометрическим функциям. Он уменьшается с увеличением угла в пределах от бесконечности до единицы.



Фиг. 193.

Пример. Чертежник желает разместить восемь отверстий для болтов по некоторому кругу, при чем между центрами отверстий должно быть по 100 мм. Определите диаметр круга (фиг. 193).

Мы ищем диаметр круга, т.-е. 2 OA, а известными являются: $AC = \frac{1}{2} \times AB = 50$ мм. и угол $AOC = \frac{1}{2} AOB = 22° 30'$.

В прямоугольном треугольнике AOC:

$$\text{косеканс } AOC = \frac{OA}{AC};$$

следовательно, $OA = AC \text{ cosec } AOC = 50 \text{ cosec } 22° 30'$;

$$\text{cosec } 22° 30' = 2{,}613;$$

$$OA = 50 \times 2{,}613 = 130{,}65$$

Диаметр круга будет 2 OA или 261,3 мм.

Мы можем, для запоминания главных соотношений между тригонометрическими функциями, написать следующие выражения:

$$\sin = \frac{\text{против. катет}}{\text{гипотен.}};\quad \mathrm{tg} = \frac{\text{против. катет}}{\text{прилеж. катет}};\quad \sec = \frac{\text{гипотен.}}{\text{прилеж. катет}}$$

$$\cos = \frac{\text{прилеж. катет}}{\text{гипотен.}};\quad \mathrm{ctg} = \frac{\text{прилеж. катет}}{\text{против. катет}};\quad \mathrm{cosec} = \frac{\text{гипотен.}}{\text{против. катет}},$$

кроме того:

$$\sin = 1 : \mathrm{cosec};\quad \cos = 1 : \sec;\quad \mathrm{tg} = 1 : \mathrm{ctg};$$

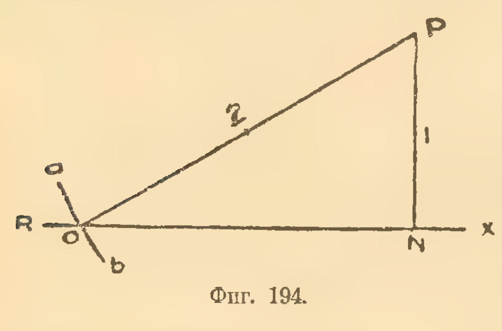
$$\mathrm{cosec} = 1 : \sin;\quad \sec = 1 : \cos;\quad \mathrm{ctg} = 1 : \mathrm{tg}.$$

§ 116. Построение углов по их тригонометрическим величинам.

Для построения углов можно воспользоваться любой из известных нам тригонометрических величин. Обыкновенно выбирают ту, которая для даннаго случая способна дать наиболее точный результат или которая дана в круглых числах.

Пример 1. Постройте угол, синус которого $\frac{1}{2}$.

Подобно тому, что имели выше для arctg и arcctg можем сказать, что искомый угол в градусах таков, что синус его равен половине, или угол $= \arcsin 0{,}5$.



Фиг. 194.

Для построения этого угла нужно построить прямоугольный треугольник, противолежащий катет которого относится к гипотенузе, как 1 : 2 (фиг. 194).

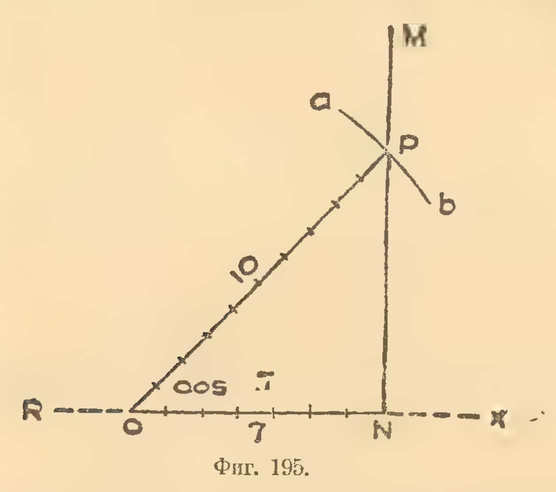
На прямой Rx, в одной из ее точек N, восставляем перпендикуляр $NP = 1$. Из точки P засекаем прямую Rx дугою радиусом $PO = 2$. Получаем точку O. Угол PON и будет искомым углом, так как

$$\sin PON = \frac{PN}{PO} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Постройте угол, косинус которого 0,7 или, иначе угол, равный arccos 0,7.

На фиг. 195 показано построение такого угла.

На прямой Rx откладываем отрезок ON в 7 произвольных



Фиг. 195.

единиц, напр., 7 см. Из точки O засекаем перпендикуляр NM к прямой Rx дугою с радиусом в 10 тех же единиц, напр., 10 см., что даст точку P. Искомый угол будет PON, так как

$$\cos PON = \frac{ON}{OP} = \frac{7}{10}.$$

§ 117. Пользование таблицами

Оно во всем подобно нахождению тангенса и котангенса по заданному углу или угла по заданному тангенсу или котангенсу; нужно лишь пользоваться соответствующим столбцом. Для углов до 45° берут верхние заголовки и идут сверху вниз, следя за углами в первом (левом) столбце, а для углов бо́льших, чем 45°, берут нижние заголовки и идут снизу вверх, следя за углами в последнем (правом) столбце.

§ 118. Нахождение промежуточных значений или интерполирование.

Часто приходится находить тригонометрическую величину для угла, величина которого находится в промежутке между двумя соседними значениями (отличающимися друг от друга в данной

таблице на 10 минут), или же ищут угол, тригонометрическая величина которого не указана в таблице точно. Во всех этих случаях делают небольшое добавочное вычисление, называемое **интерполированием** или **интерполяцией.**

На практике чаще всего ограничиваются приближенным значением угла или тригонометрической величины, но иногда приходится делать точное вычисление, и тогда без интерполяции не обойтись. Объясним интерполяцию на примерах.

Пусть дан угол в 36° 43′ 21″; требуется найти его синус.

Мы превращаем секунды в десятичные доли минуты делением их числа на 60:

$$21'' = \frac{21}{60} = 0{,}35'.$$

Ищем

$$\sin 36^\circ\ 43{,}35'.$$

В таблице находим синусы ближайших углов, а именно:

$$\sin 36^\circ\ 50' = 0{,}5995;$$
$$\sin 36^\circ\ 40' = 0{,}5972.$$

Вычитая один из другого, мы видим, что на 10 минут синусы отличаются на 0,0023, что составит для каждой минуты разницу в $\frac{1}{10}$ часть, т.-е. 0,00023.

Данный угол отличается от меньшего табличнаго угла на 3,35 минуты; следовательно, его синус будет отличаться от меньшего табличного синуса на:

$$0{,}00023 \times 3{,}35 = 0{,}0008,$$

поэтому $\sin 36^\circ\ 43{,}35' = 0{,}5972 + 0{,}0008 = 0{,}5980.$

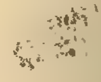
Проделаем **обратную интерполяцию.** Допустим, требуется найти угол, синус которого будет 0,4 или arcsin 0,4. В таблице наиболее близкие значения будут:

$$\sin 23^\circ\ 40' = 0{,}4014$$
$$\text{и } \sin 23^\circ\ 30' = 0.3987$$

Разница на 10′ равна 0,0027.

Сравним наш синус с наименьшим из табличных синусов:

синус искомого угла	= 0,4000;
синус в таблице	= 0.3987;
разница равна	0,0013



Мы видим, что на 10 минут синусы отличаются на 0,0027. Спрашивается, скольким минутам будет отвечать разница в синусах 0,0013?

Задача решается пропорцией: 0,0027 во столько раз больше 0,0013, во сколько 10 минут больше искомой разницы.

Обозначая ее через x, получим:

$$27 \quad 13 = 10 : x;$$

откуда

$$x = \frac{13 \times 10}{27} = \text{приблиз. } 5'.$$

Искомый угол будет:

$$23^\circ\ 30' + 5' = 23^\circ\ 35'.$$

Когда вычисляют косинусы, то производят действия над бо̀льшим из углов, с тем, чтобы иметь при интерполировании дело со сложением, а не с вычитанием; напомним, что чем больше косинус, тем угол меньше, и наоборот.

Пример. Найти cos 49° 46′.

Из таблицы находим:

$$\cos 49^\circ\ 40' = 0{,}6472;$$
$$\cos 49^\circ\ 50' = 0{,}6450;$$
$$\text{разница на } 10' = 0{,}0022.$$

Сравним наш угол с бо̀льшим углом:

$$49^\circ\ 50' - 49^\circ\ 46' = 4'.$$

На 10′ косинусы отличаются на 0,0022; на 1′ разница будет 0,00022; на 4′:

$$0{,}00022 \times 4 = 0{,}00088 \text{ или, округляя, } 0{,}0009.$$

Поэтому искомая величина будет:

$$\cos 49^\circ\ 46' = 0{,}6450 + 0{,}0009 = 0{,}6459.$$

Если бы взяли меньший угол, то разницу пришлось бы вычитать:

$$49^\circ\ 46' - 49^\circ\ 40' = 6';$$

$$0{,}00022 \times 6 = 0{,}00132, \text{ или округляя, } 0{,}0013.$$

Искомая величина будет:

$$\cos 49^\circ\ 46' = 0{,}6472 - 0{,}0013 = 0{,}6459 \text{ (та же самая).}$$

Решим обратную задачу. Найти угол, косинус которого 0,4 (т.-е. arccos 0,4).

В таблице наиболее близкие значения будут:

$$\cos 66^\circ\ 20' = 0{,}4014;$$
$$\cos 66^\circ\ 30' = 0{,}3987;$$
$$\text{разница на } 10' = 0{,}0027.$$

Сравнивая наш косинус с наименьшим косинусом, т.-е. с косинусом наибольшего угла, мы получим:

косинус искомого угла	= 0,4000;
косинус в таблице	= 0,3987;
разница равна	0,0013.

Применяем ту же пропорцию:

$$27 : 13 = 10 : x;$$

откуда $x =$ приблиз. $5'$.

Но так как мы сравнивали косинус с косинусом угла больше искомого, то полученное число придется вычесть, и искомый угол будет:

$$66^\circ\ 30' - 5' = 66^\circ\ 25'.$$

Задачи.

172. Найдите из таблиц следующие величины:

$\sin 14^\circ\ 28'$; $\cos 70^\circ\ 52'$;
$\mathrm{tg}\ 63^\circ\ 26'$; $\sec 48^\circ\ 12'$;
$\mathrm{cosec}\ 24^\circ\ 35'$; $\mathrm{ctg}\ 36^\circ\ 1'$.

173. Найдите из таблиц следующие углы:

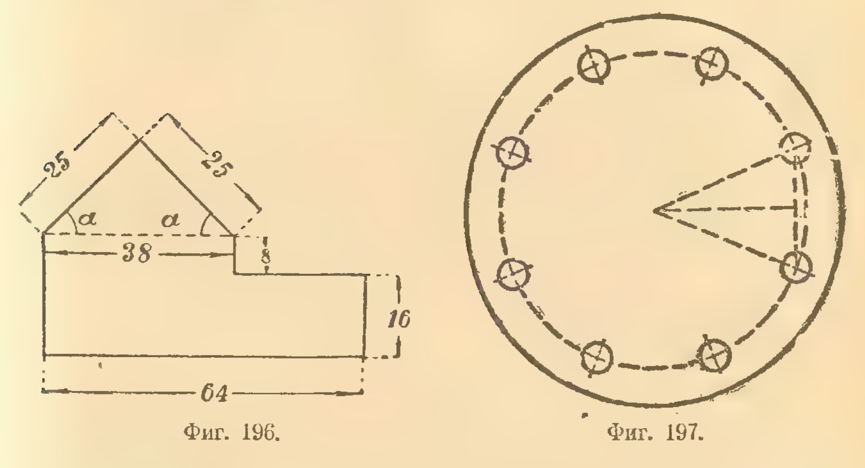
arctg 2; arccosec 1,25;
arcsin 0,3; arcsec 1,05
arccos 0,7; arcctg 0,875

174. Постройте посредством их тригонометрических величин следующие углы:

arcsin 0,2; arctg 2;
arccos 0,6; 14° 28′.

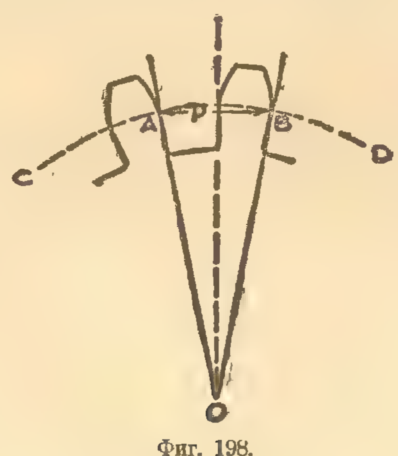
175. Какой длины должны быть проволочные канаты, удерживающие железную трубу и укрепленные к ней на высоте в 14 метров от грунта, при угле их с горизонтом в 35°?

176. Определите угол α на фиг. 196.



Фиг. 196. Фиг. 197.

177. Определите расстояние по хорде между центрами отверстий, изображенных на фиг. 197. Диаметр круга разметки 250 мм., число отверстий для болтов в крышке парового цилиндра восемь.



Фиг. 198.



Фиг. 199.

178. Определите расстояние p по хорде (фиг. 198) между соответствующими сторонами зубьев шестерни (шаг), если диаметр ее 100 мм., а число зубьев шестнадцать.

179. Двадцать стальных шариков диаметром 12 мм. находятся в показанном на фиг. 199 шариковом подшипнике. Определите диаметр наружного и внутреннего круга катания.

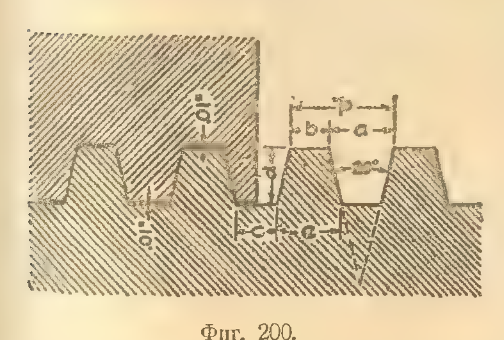
ГЛАВА XVII.

Винтовые нарезки и шестерни со спиральной нарезкой.

§ 119. Нарезка Акме.

В главе XV были даны размеры для нарезок в форме V и нормальной американской. Кроме того, существует большое число различных типов нарезок, о которых не мешает сказать несколько слов, так как они употребляются довольно часто в машиностроении.

Нарезка Акме показана на фиг. 200 и имеет угол уклона для боковых граней зубьев в 29°. Эта нарезка употребляется весьма часто для ходовых винтов токарных станков и в тех случаях, когда пользуются винтом для передачи усилий. Рабочая глубина нарезки равна половине шага винта; действительная глубина делается на одну сотую дюйма больше для собирания масла и грязи.



Фиг. 200.

Размеры, обозначенные буквами на чертеже, следующие:

p = шаг нарезки $= \dfrac{1}{\text{число ниток в дюйме}}$;

d = полная глубина $= 0{,}5p + 0.01$ дм.;

a = ширина впадины вверху $= 0{,}6293\,p$;

b = ширина зуба вверху $= 0{,}3707\,p$;

c = ширина впадины внизу $= 0{,}3707\,p - 0{,}0052$ дм.;

e = ширина основания зуба $= 0{,}6293\,p + 0{,}0052$ дм.

§ 120. Червячная нарезка Браун и Шарп в 29°.

Эта нарезка, изображенная на фиг. 201, очень похожа на нарезку Акме, но отличается от нее большей глубиной.

p = шаг нарезки $= \dfrac{1}{\text{число ниток в дюйме}}$;

d = полная глубина $= 0{,}6866\,p$;

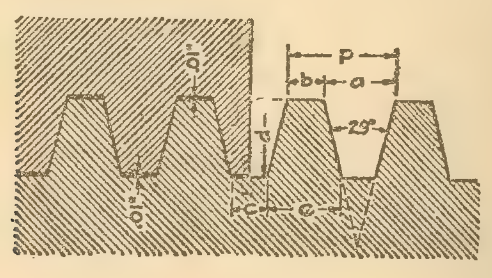
d' = рабочая глубина $= 0{,}6366\,p$;

a = ширина впадины вверху $= 0{,}665\ p$;

b = ширина зуба вверху $= 0{,}335\ p$;

c = ширина впадины внизу $= 0{,}310\ p$;

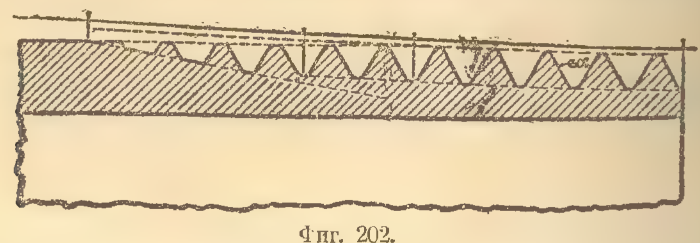
e = ширина основания зуба $= 0{,}690\ p$.



Фиг. 201.

§ 121. Нарезка Брига для труб.

Она показана на фиг. 202. Боковые грани зубьев имеют уклон в 60°. Верхушка зубьев и дно впадины там, где они на-



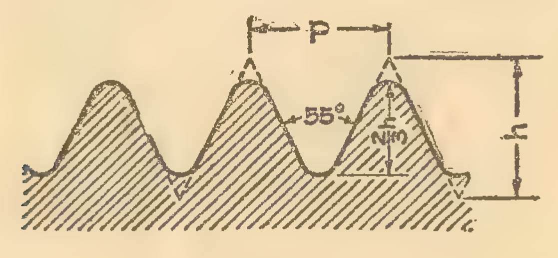
Фиг. 202.

резаны полностью, имеют небольшие закругления, при чем глубина впадины 0,8 p (вместо 0,866 p для V-образной нарезки и 0,65 p — для американской).

Четыре первых зуба имеют скошенное дно и неполную высоту. Два следующих зуба имеют правильное дно, но слегка усеченный верх. Остальные зубья, числом $4{,}8 + 0{,}8\,D$, где D диаметр трубы снаружи, нарезаны на конус с уклоном образующей в $\frac{1}{32}$.

§ 122. Винтовая нарезка Витворта.

Она изображена на фиг. 203 и встречается в английских машинах. Угол боковых граней нарезки 55°; зубья и впадины за-



Фиг. 203

кругдены. Если назвать через h высоту равнобедренного треугольника с углом при вершине в 55° и с основанием равным шагу винта p, то высота зуба будет $\frac{2}{3}\,h$.

§ 123. Нарезка Британской Ассоциации.

Она похожа на нарезку Витворта, но имеет более крутые грани с углом $47\frac{1}{2}°$ и высоту зубьев в $0{,}6\,p$.

§ 124. Метрическая нарезка.

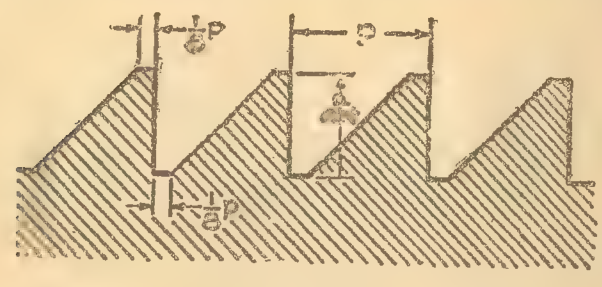
По форме она не отличается от американской, имея уклон граней в 60° и усеченные зубья той же высоты $0{,}65\,p$. Шаг дается в миллиметрах.

§ 125. Международная нарезка.

Эта тоже метрическая нарезка, но для некоторых диаметров винтов величина шага несколько иная.

§ 126. Нарезка в виде зубьев пилы

Она показана на фиг. 204 и употребляется иногда в тех случаях, когда упор всегда в одну и ту же сторону. Одна из гра-

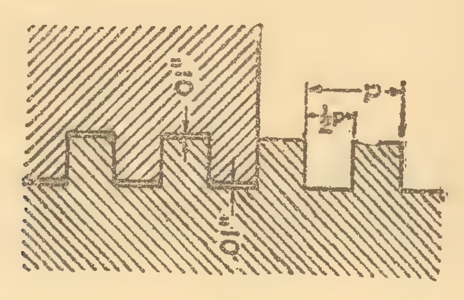


Фиг. 204.

ней вертикальная, а другая с уклоном в 45°. Зубья скошены настолько, чтобы образовать площадку в $\frac{1}{8}$ p; такая же площадка имеется и у основания впадины. Высота зубьев $\frac{3}{4}$ p.

§ 127. Квадратная нарезка.

Она показана на фиг. 205 и употребляется в винтах, передающих усилия, как напр., у домкратов. Ширина зубьев и впадин равна половине шага. Высота зубьев или глубина впадины на 0.01 дм. больше против половины шага.



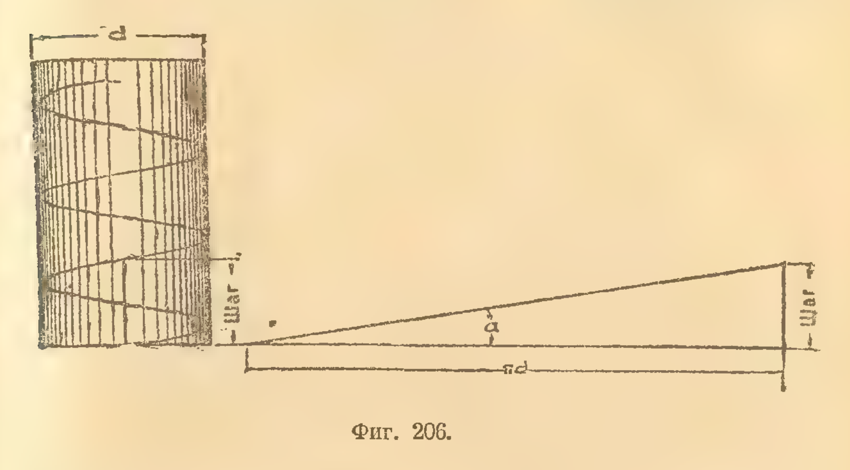
Фиг. 205.

§ 128. Шаг и угол подъема винтовой линии.

Если мы вообразим прямоугольный треугольник с основанием, равным длине окружности цилиндра, навернутым на цилиндр

(фиг. 206), то его гипотенуза образует винтовую линию, шаг которой будет равен другому катету.

Угол a, образуемый гипотенузой с основанием равным πd



Фиг. 206.

называется углом подъема винтовой линии. Называя шаг через p, а диаметр цилиндра d, будем иметь:

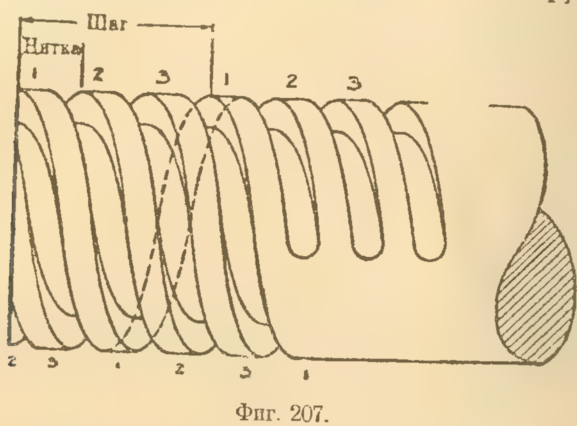
$$\operatorname{tg} a = \frac{p}{\pi d}.$$

Винтовая нарезка получается продвижением резца по направлению образующей или оси цилиндра, находящегося во вращательном движении. От относительной скорости обоих движений зависит шаг нарезки и ее угол подъема, за который принимают угол подъема винтовой линии того же шага, навернутой на цилиндр диаметром, равным полусумме диаметров (у вершины и у основания нарезки). Для правильности самой нарезки резец должен быть установлен не прямо против нарезаемого цилиндра, а с отклонением, равным вычисленному углу подъема. Иногда резцу придают заточку, принимающую в расчет этот угол подъема.

§ 129. Нарезка в несколько ниток.

На фиг. 207 показана нарезка в три нитки; это значит, что на расстоянии, равном шагу нарезки, помещается три нитки вместо одной. При вращении винта в гайке продвижение на

каждый оборот равно шагу; если желают иметь крупное про-



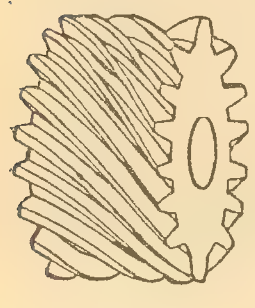
Фиг. 207.

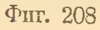
движение и мелкую резьбу, чтобы не ослабить винта, то делают нарезку в несколько ниток.

§ 130. Шестерни со спиральной нарезкой.

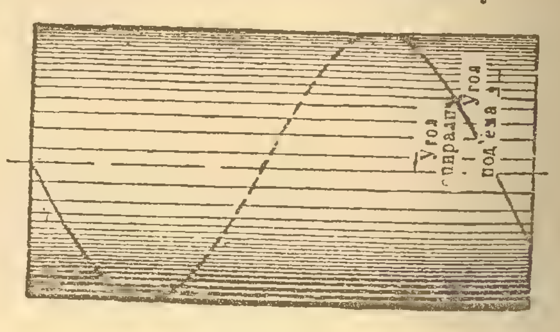
Если зубья шестерни не прямые, а нарезаны по винтовым линиям подобно тому, как изображено на фиг. 208, мы имеем **шестерни со спиральными зубцами** (или нарезкой).

Спиральная нарезка есть не что иное, как многониточная нарезка с очень длинным шагом. Углом спирали называют угол





Фиг. 208



Фиг. 209.

дополнительный до 90° к углу подъема, т.-е. угол винтовой линии не с основанием, а с образующей цилиндра. Очевидно, что котангенс угла спирали равен тангенсу угла подъема и наоборот (фиг. 209)

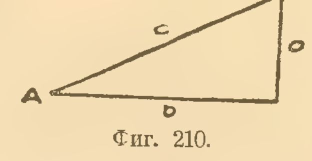
Тангенс угла спирали получается делением средней окружности на шаг.

При нарезке спиральной шестерни стол фрезерного станка должен быть повернут на угол, равный углу спирали.

Шпиндель, на который насажена нарезаемая болванка, должен делать один оборот за время продвижения стола фрезерного станка на величину, равную шагу средней винтовой линии.

§ 131. Соотношения между тригонометрическими функциями.

Если одна из тригонометрических функций угла дана, то все остальные могут быть легко вычислены. Вывод основан на определении их и на свойствах прямоугольного треугольника.



Фиг. 210.

В дополнение к тем соотношениям, которые были даны ранее в главе XVI, мы можем вывести еще следующие.

На фиг. 210 изображен прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c и углом A против катета a.

Мы знаем, что:

$$a^2+b^2=c^2;$$

следовательно,

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1.$$

Но

$$\frac{a}{c}=\sin A \quad \text{и} \quad \frac{b}{c}=\cos A;$$

следовательно.

$$(1) \quad \sin^2 A+\cos^2 A=1;$$

$$(2) \quad \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A};$$

$$(3) \quad \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

Имеем также:

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}=\operatorname{tg} A;$$

поэтому

$$(4) \quad \frac{\sin A}{\cos A}=\operatorname{tg} A.$$

Из (4), (2) и (3) получим:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}},$$

а также
$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sqrt{1 - \cos^2 A}}.$$

Мы можем также вывести выражения:

$$\cos^2 A = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 A};$$

$$\sin^2 A = \frac{\operatorname{tg}^2 A}{1 + \operatorname{tg}^2 A} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 A}.$$

Задачи.

180. Выведите формулу, дающую диаметр у основания нарезки Витворта в общем случае, подобно тому, как в главе XV это было сделано для нарезок в форме V и американской.

181. Определите диаметр у основания нарезки Витворта для наружного диаметра болта $1\frac{3}{4}$ дм. при пяти нитках в дюйме.

182. Двухдюймовый болт имеет двухниточную нарезку Акме при шаге 1 дм. Определите угол подъема

183. Зная, что $\sin 30° = \frac{1}{2}$, определите из соотношений, данных в главах XVI и XVII, другие тригонометрические величины этого угла.

184. Если мы знаем тригонометрические величины какого-нибудь угла, мы можем определить тригонометрические величины половинного угла, пользуясь формулами:

$$\left(\sin \tfrac{1}{2} A\right)^2 = \tfrac{1}{2}(1 - \cos A) \quad \text{и} \quad \left(\cos \tfrac{1}{2} A\right)^2 = \tfrac{1}{2}(1 + \cos A).$$

Зная, что $\cos 30° = 0{,}866$, вычислите другие тригонометрические величины для угла в 15°.

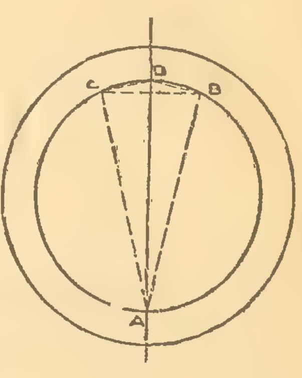
185. Определите угол подъема для полуторадюймового винта с шестью нитками в дюйме.

186. Чему должна быть равна режущая кромка у конца резца для нарезки Акме в шесть ниток на дюйм.

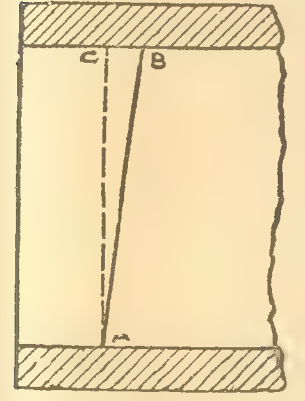
187. Отверстия просверливаются часто несколько больших размеров, чем теоретический диаметр. Для измерения величины

отступления поступают иногда следующим образом (см. фиг. 211).

Калибр определенной длины, напр., 150 мм., соответствующий теоретическому диаметру, вставляется в отверстие; он, однако, занимает не центральное положение AD (фиг. 211), а боковые положения AB и AC. Посредством масштаба измеряют общее отклонение BC, которое, допустим, равно 12 мм. Зная это отклонение, нетрудно вычислить точный диаметр отверстия. Задача решается следующим образом: сначала определяем угол DAB из прямоугольного треугольника, имеющего гипотенузу $AB = 150$ мм. и малый катет $= \frac{1}{2}BC = 6$ мм. Затем переходим к прямоугольному треугольнику, имеющему гипотенузой искомый диаметр AD. Угол DBA прямой, так как его стороны проходят через концы диаметра. Произведите расчет.



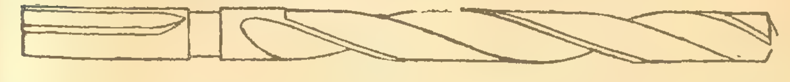
Фиг. 211.



Фиг. 212.

188. На фиг. 212 показывается способ, употребляемый для определения диаметра отверстий, сделанных немного меньше теоретических. Тут теоретический диаметр занимает наклонное положение AB (фиг. 212). Посредством масштаба определяется величина отклонения BC и затем вычисляется действительный диаметр отверстия AC. Произведите расчет для $AB = 200$ мм., $BC = 12$ мм.

189. На фиг. 213 показано спиральное сверло. Если полный оборот спирали получается на длине, равной семи диаметрам ее, вычислите угол спирали.

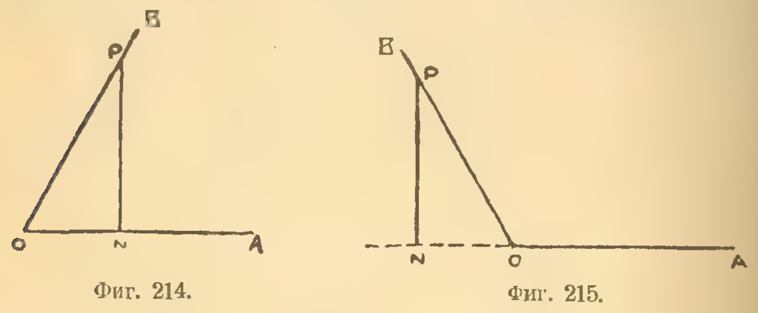

Фиг. 213.

ГЛАВА XVIII.

Решение треугольников.

§ 132. Тригонометрические функции углов больших 90°.

До сего времени мы ограничивали наши вычисления прямоугольны и треугольниками, и все тригонометрические функции (величины) относились к углам меньшим 90°. Но при решении косоугольных треугольников часто приходится иметь дело с ту-



Фиг. 214. Фиг. 215.

пыми углами, и мы должны познакомиться с тригонометрическими функциями углов больших 90°.

Обратим наше внимание на острый угол BOA (фиг. 214). Для него:

$$\sin AOB = \frac{NP}{OP}; \ \cos AOB = \frac{ON}{OP}; \ \operatorname{tg} AOB = \frac{NP}{ON} \text{ и т. д.}$$

Обратимся к тупому углу BOA (фиг. 215). Предположим сторону OA продолженной в обратную сторону в направлении ON и опустим перпендикуляр PN. Те же самые отношения, что и раньше, будут тригонометрическими функциями для угла PON — дополнительного к углу POA до 180°. Если мы во всех предыдущих отношениях, в которые входит величина ON, будем считать ее

отрицательной, так как она направлена в обратную сторону, то мы получим то, что принято подразумевать под тригонометрическими функциями тупого угла. Таким образом, мы будем иметь (фиг. 215):

$$\sin AOB = \frac{PN}{OP} = \sin PON; \qquad \cos AOB = \frac{-ON}{OP} = -\cos PON;$$

$$\operatorname{tg} AOB = \frac{PN}{-ON} = -\operatorname{tg} PON; \qquad \operatorname{ctg} AOB = \frac{-ON}{PN} = -\operatorname{ctg} PON;$$

$$\sec AOB = \frac{OP}{-ON} = -\sec PON; \qquad \operatorname{cosec} AOB = \frac{OP}{PN} = \operatorname{cosec} PON.$$

Возьмем угол $AOB = 120°$; тогда дополнительный до $180°$ угол $PON = 180° - 120° = 60°$ и, следовательно:

$$\sin 120° = \sin 60° = 0{,}8660; \qquad \cos 120° = -\cos 60° = -0{,}5000;$$
$$\operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -1{,}7320; \qquad \operatorname{ctg} 120° = -\operatorname{ctg} 60° = -0{,}5774;$$
$$\sec 120° = -\sec 60° = -2{,}0000; \qquad \operatorname{cosec} 120° = \operatorname{cosec} 60° = 1{,}1550.$$

Таким образом, те же таблицы служат для определения тригонометрических функций тупых углов.

§ 133. Тригонометрические величины угла 0°.

На фиг. 216 показан малый угол PON. Перпендикуляр PN постепенно уменьшается с уменьшением угла, а ON постепенно приближается к величине OP. Когда PN превратится в 0 — угол PON будет равен 0°, и ON ставет равным OP: отсюда следует, что:

Фиг. 216

$$\sin 0° = \frac{0}{OP} = 0; \quad \cos 0° = \frac{ON}{OP} = 1;$$

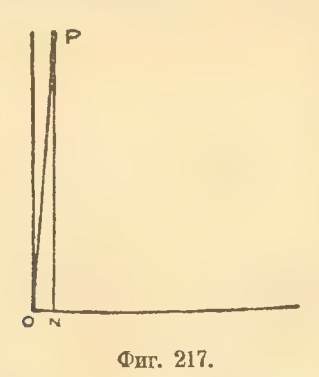
$$\operatorname{tg} 0° = \frac{0}{ON} = 0; \quad \sec 0° = \frac{OP}{ON} = 1.$$

Что касается котангенса и косеканса, то они постепенно возрастают с уменьшением угла и становятся бесконечно-большими, что обозначают знаком ∞:

$$\operatorname{ctg} 0° = \frac{ON}{0} = \infty, \quad \operatorname{cosec} 0° = \frac{OP}{0} = \infty$$

§ 134. Тригонометрические величины угла в 90°.

На фиг. 217 показан острый угол PON, приближающийся к



Фиг. 217.

прямому углу. Когда угол PON станет равен 90°, то ON будет равно 0, а PN равно OP. Отсюда следует:

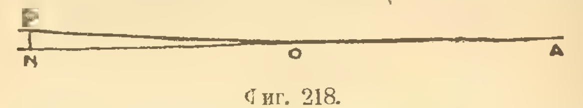
$$\sin 90° = \frac{PN}{OP} = 1; \qquad \cos 90° = \frac{0}{OP} = 0;$$

$$\operatorname{tg} 90° = \frac{PN}{0} = \infty; \qquad \operatorname{ctg} 90° = \frac{0}{PN} = 0;$$

$$\sec 90° = \frac{OP}{0} = \infty; \qquad \operatorname{cosec} 90° = \frac{OP}{PN} = 1.$$

§ 135. Тригонометрические величины угла в 180°.

На фиг. 218 показан тупой угол POA, приближающийся к 180°. Величина ON считается отрицательной и по величине (не



Фиг. 218.

считая знака, т.-е., как говорят, по „абсолютному своему значению") приближается к OP; отсюда следует, что:

$$\sin 180° = \sin 0° = 0; \qquad \cos 180° = -\cos 0° = -1;$$

$$\operatorname{tg} 180° = -\operatorname{tg} 0° = 0; \qquad \operatorname{ctg} 180° = -\operatorname{ctg} 0° = -\infty;$$

$$\sec 180° = -\sec 0° = -1; \qquad \operatorname{cosec} 180° = \operatorname{cosec} 0° = \infty.$$

§ 136. Решение треугольников.

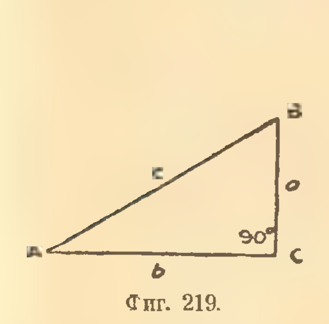
В предыдущих главах мы применяли тригонометрические величины к решению прямоугольных треугольников; посредством двух новых выражений относительно косинусов и синусов, которые мы выведем ниже, мы можем решать какие угодно косоугольные треугольники.

§ 137. Зависимость между косинусом угла и сторонами треугольника.

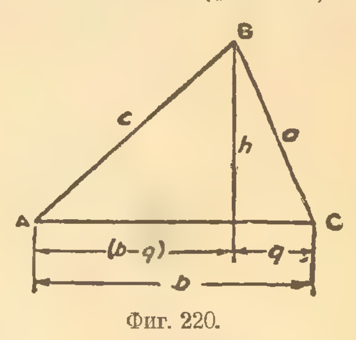
На фиг. 219 представлен прямоугольный треугольник, в котором, как известно,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Опустив из вершины B треугольника ABC (фиг. 220) пер-



Фиг. 219.



Фиг. 220.

пендикуляр h на основание, мы разделим последнее на два отрезка, которые назовем q и $(b-q)$.

Из прямоугольного треугольника с гипотенузой c и катетами h и $(b-q)$ имеем, согласно с теоремой Пифагора:

$$(1) \qquad c^2 = h^2 + (b-q)^2;$$

или

$$(2) \qquad c^2 = h^2 + b^2 - 2bq + q^2.$$

Из другого прямоугольного треугольника с гипотенузой a и с катетами h и q, по той же теореме:

$$(3) \qquad h^2 = a^2 - q^2.$$

Подставив эту величину в уравнение (2), найдем:

$$c^2 = a^2 - q^2 + b^2 - 2bq + q^2,$$

или

$$(4) \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2bq.$$

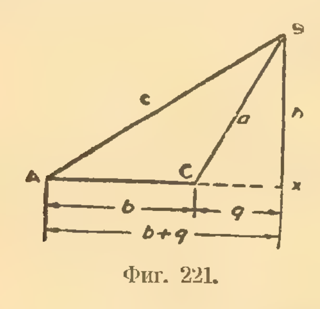
С другой стороны, q может быть выражено через a и косинус угла C, противолежащего стороне c, а именно:

$$q = a \cos C.$$

Следовательно:

$$(5) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Но допустим, что, как показано на фиг. 221, угол C, противолежащий стороне c, будет не острый, как на фиг. 220, а



Фиг. 221.

тупой; тогда вывод формулы путем. аналогичным показанному, даст:

$$(6) \qquad c^2 = h^2 + (b + q)^2;$$

или $$(7) \qquad c^2 = h^2 + b^2 + 2bq + q^2;$$

а также $$(8) \qquad h^2 = a^2 - q^2;$$

след. подст.: $$(9) \qquad c^2 = a^2 + b^2 + 2bq.$$

Формула (9) отличается от формулы (4) только знаком последнего члена.

Кроме того, мы знаем, что

$$(10) \qquad q = a \cos BCX;$$

но, с другой стороны:

$$\cos BCX = -\cos C \text{ (как для дополнительного угла до } 180^\circ).$$

Следовательно, как раньше:

$$(11) \qquad c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos BCX = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Формула эта, таким образом, вполне общая.

Подобным же образом выводится формулы для других сторон, при чем получим следующие три выражения:

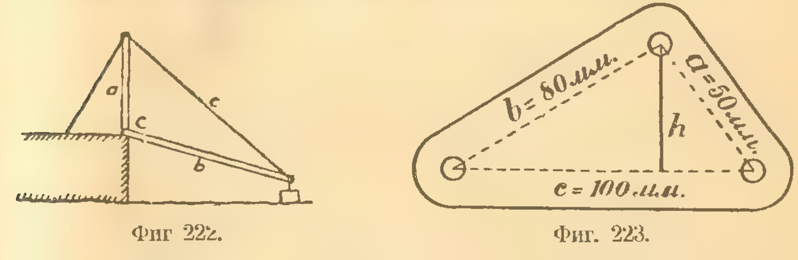
(12) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$;

(13) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$;

(14) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

Углы, входящие в эти формулы, заключены между двумя сторонами, которые принимаются за данные, и формулы дают квадрат противоположной стороны.

Пример. На фиг. 222 показан кран, у которого стойка $a = 9$



Фиг 222. Фиг. 223.

метрам, а плечо $b = 12$ метрам. Тупой угол между сторонами a и b должен быть 130°. Определить длину каната c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

$$\cos C = \cos 130° = -\cos 50° = -0{,}6428;$$

$$c^2 = 9^2 + 12^2 + 2 \times 9 \times 12 \times 0{,}6428;$$

$$c^2 = 81 + 144 + 138{,}84 = 363{,}84;$$

$$c = \sqrt{363{,}84} = 19{,}07 \text{ метра.}$$

Из формул (12—14) выводим:

(15) $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

(16) $$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

(17) $$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Пример. На фиг. 223 показаны на треугольной пластинке три отверстия A, B, C, расстояния между которыми известны. Определить расстояние h между верхним отверстием и прямою.

соединяющей два нижних отверстия. Определим сперва один из углов A или B по формуле (15):

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Подставляя, получим:

$$\cos A = \frac{80^2 + 100^2 - 50^2}{2 \times 80 \times 100} = \frac{139}{160} = 0{,}8687.$$

По таблице находим, что угол $A = 29^\circ\ 41'$.

Вычислим h по формуле:

$$h = b \sin A = 80 \times \sin 29^\circ\ 41'.$$

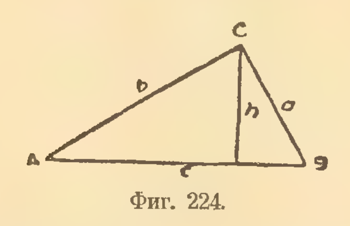
Из таблицы находим:

$$\sin 29^\circ\ 41' = 0{,}4953.$$

Следовательно: $h = 80 \times 0{,}4953 = 39{,}62$ мм.

§ 138. Зависимость между синусами углов и сторонами треугольника.

На фиг. 224 показан треугольник ABC, стороны которого



Фиг. 224.

обозначены a, b, c, а высота — h. Из двух прямоугольных треугольников имеем:

$$h = a \sin B,$$

и

$$h = b \sin A;$$

следовательно,

$$a \sin B = b \sin A;$$

откуда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Если опустим перпендикуляры не из вершины C, а из одной из вершин B или A, то найдем:

$$a \sin C = c \sin A;$$

или же для вершины A:

$$b \sin C = c \sin B;$$

Первое равенство дает:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C};$$

а второе —
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Сравнивая эти равенства с ранее полученным:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B};$$

найдем:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{18}$$

Это выражает, что стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

§ 139. Применение правил §§ 137 и 138 к решению треугольников.

В зависимости от данных задачи при решении косоугольных треугольников могут встретиться следующие четыре случая:

1. Даны две стороны и угол между ними.

Третью сторону находят по формулам для косинуса: затем посредством выражения для синусов отыскивают недостающие углы.

2. Даны два угла и сторона, прилежащая к ним. Третий угол находим, вычитая сумму двух данных углов из 180°, затем, применяя формулу (18), отыскивают недостающие две стороны.

3. Даны все три стороны. Углы определяются посредством выражения для косинуса.

4. Даны две стороны и угол, противолежащий одной из них.

Этот случай допускает два решения, как видно из фиг. 225; зная, напр., стороны b и a и угол A, мы можем получить либо треугольник ABC, либо треугольник $AB'C$. Один треугольник имеет тупой угол CBA, другой имеет острый $CB'A$.

Фиг. 225.

Для решения применяем выражение (18) для синусов. Таблицы дадут нам острый угол, но мы знаем, что дополнительный до 180° угол имеет тот же самый синус; следовательно, определив угол B', мы найдем угол B, вычтя B' из 180°. Имея два угла B и B', мы получим для угла C также два решения.

§ 140. Площади треугольников.

Если один из углов известен, легче всего получить площадь треугольника, вычислив высоту h по стороне и прилежащему углу. Напр., в треугольнике, показанном на фиг. 224, мы имеем:

$$h = b \sin A \quad \text{или} \quad h = a \sin B$$

Так как площадь треугольника s равна половине произведения основания c на высоту h, т.-е.

$$s = \frac{1}{2} ch;$$

то, следовательно:
$$s = \frac{1}{2} cb \sin A;$$

или
$$s = \frac{1}{2} ca \sin B,$$

т.-е. площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

Если нам неизвестны углы, а даны все три стороны, то вывести формулу для определения площади треугольника по этим данным можно следующим образом (фиг. 224):

Площадь
$$s = \frac{1}{2} hc = \frac{1}{2} bc \sin A;$$

но мы знаем, что
$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1;$$

следовательно:
$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}.$$

По уравнению (14):

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc};$$

следовательно: $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}\right)^2}$

поэтому $s = \frac{1}{2} bc \sqrt{1 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{2} bc \sqrt{\frac{(2bc)^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}{(2bc)^2}};$$

$$(19) \qquad s = \frac{1}{4} \sqrt{(2bc)^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}.$$

Под знаком корня мы имеем разность двух квадратов; такая разность равна произведению суммы на разность, как это видно из формулы:

$$x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y).$$

Формула (19) преобразуется в

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{[(2bc + c^2 + b^2) - a^2]\,[a^2 - (c^2 + b^2 - 2bc)]} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{[(c + b)^2 - a^2]\,[a^2 - (c - b)^2]},$$

или, разлагая подкоренное выражение на четыре множителя, получаем:

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{(c + b + a)\,(c + b - a)\,(a + c - b)\,(a - c + b)}.$$

Назовем сумму сторон треугольника или его периметр через $2p$, т.-е. положим:

$$c + b + a = 2p;$$

тогда:

$$c + b - a = 2p - 2a;$$

$$a + c - b = 2p - 2b;$$

$$a - c + b = 2p - 2c;$$

следовательно: $s = \frac{1}{4} \sqrt{2p\,(2p - 2a)\,(2p - 2b)\,(2p - 2c)} =$

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{16p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)} =$$

$$s = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}.$$

Это и есть искомая формула, которою мы уже неоднократно пользовались, но без доказательства.

Задачи.

190. Найдите при помощи таблицы следующие тригонометрические величины:

синус, косинус и тангенс 150°;

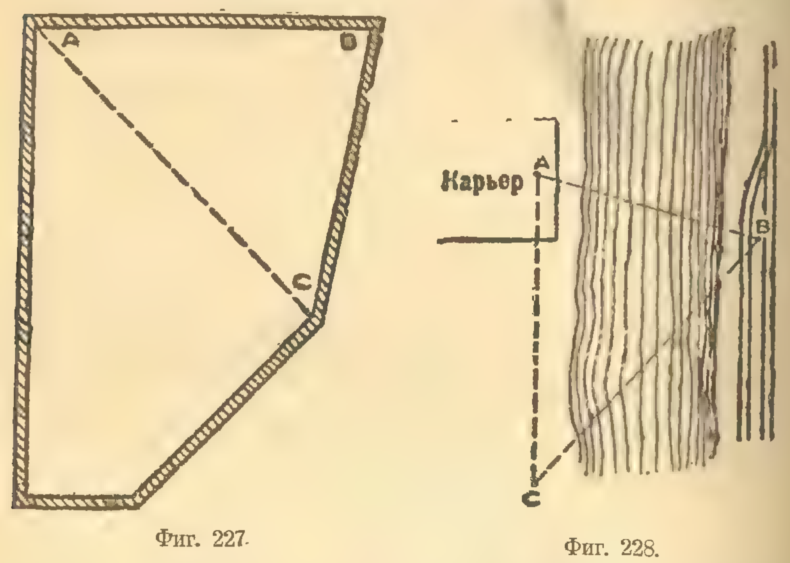
тангенс и котангенс 135°;

синус, косинус и секанс 160°35′.

191. На фиг. 226 показана разметка трех дыр, A, B и C в доске. Определите размеры x и y.

Фиг. 226.

192. На фигуре 227 показан план участка, который желают разгородить по линии AC. В виду препятствий, встречающихся вдоль линии AC, затруднительно измерить длину AC непосредственно; вместо этого измерены: $AB = 50$ метров, $BC = 40$ метров и угол $ABC = 64°15'$. Вычислить по этим данным длину AC и площадь треугольника ABC.

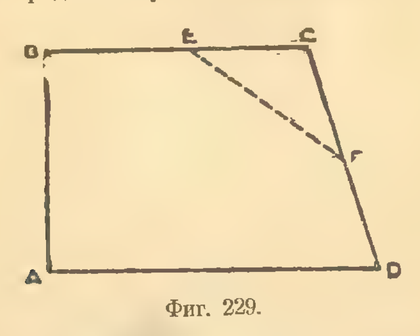


Фиг. 227. Фиг. 228.

193. Требуется устроить канатную передачу грузов между карьером (фиг. 228) в точке A и железнодорожной веткой в точке B

по другую сторону реки. Необходимо измерить расстояние AB, для чего вдоль реки отмерена база AC длиною 150 метров и определены углы BAC и BCA, равные соответственно 74°35′ и 44°15′. Вычислить длину AB.

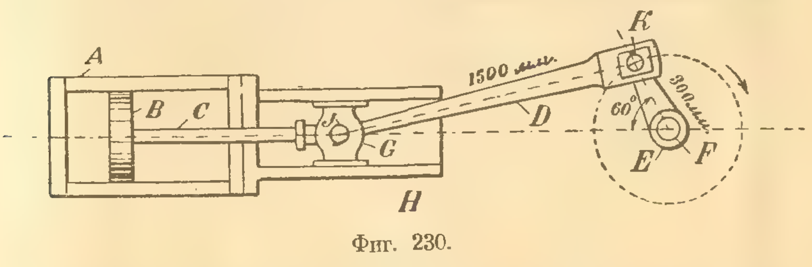
194. Чтобы определить угол BCD (фиг. 229), отложены в на-



Фиг. 229.

туре расстояния CE и CF вдоль сторон CB и CD по 9 метров каждое; измерена длина EF, равная 14,8 метра. Вычислить угол BCD.

195. На фиг. 230 показана паровая машина с ходом поршня в 60 см.; длина шатуна равна 150 см., а кривошипа 30 см.



Фиг. 230.

а) Найти расстояние между центром коленчатого вала и болтом ползуна (крейцкопфным болтом), когда кривошип повернут на 60° от горизонтального положения.

б) Определите, насколько поршень продвинулся до указанного на фиг. 230 положения от мертвой точки.

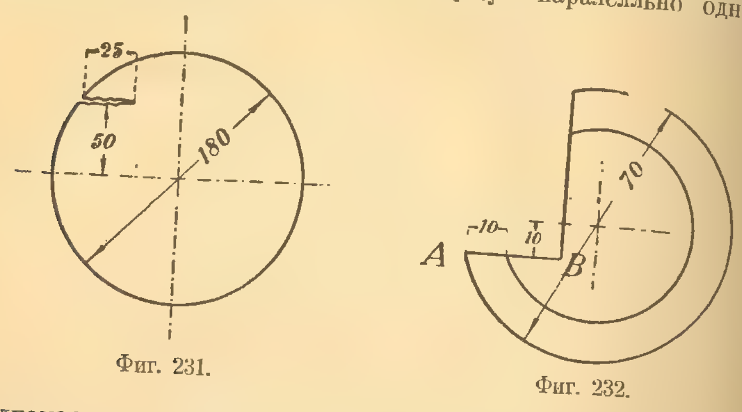
в) Определите, при каком угле поворота кривошипа:

1) шатун получает наибольшее отклонение. Вычислите это отклонение.

2) шатун перпендикулярен к кривошипу.

г) Проверьте результаты построением.

196. Металлический кружок (фиг. 231) диаметром 180 мм. имеет трещину длиною в 25 мм., идущую параллельно одному



Фиг. 231.

Фиг. 232.

из диаметров на расстоянии 50 мм. от него. Каков будет диаметр кружка, если его обточить до исчезновения трещины.

197. Круглый фасонный резец имеет вид, показанный на фиг. 232. Определить диаметр внутреннего круга.

ГЛАВА XIX.

Логарифмы.

§ 141. Основные определения.

При посредстве логарифмов такие действия, как: умножение, деление, возвышение в степень и извлечение корня производятся легче, чем обычным путем. В некоторых случаях вычисления без логарифмов становятся почти невозможными.

Что такое **логарифм**? Это есть показатель той степени, в которую надо возвысить определенное число, называемое **основанием**, для того, чтобы получить другое число. Чаще всего основанием служит 10. Вторая степень десяти—сто, поэтому логарифм 100 равен 2. Третья степень десяти — тысяча, поэтому 3 есть логарифм 1000 и т. д.

Для того, чтобы перемножить две различные степени одной и той же величины, служащей основанием, достаточно сложить показатели степеней; так:

$$x^2 \times x^5 = x^{2+5} = x^7$$

Подобным же образом:

$$10^3 \times 10^6 = 10^{3+6} = 10^9.$$

При умножении таких чисел мы, даже, не зная ничего о логарифмах, в действительности применяем их. Напр., помножая:

$$1\,000 \times 1\,000\,000 = 1\,000\,000\,000,$$

мы подсчитываем нули множимого и множителя и, сложив их, пишем сразу результат. В действительности мы складываем логарифмы множимого и множителя, что дает нам логарифм произведения.

$$10 \times 1000 = 10^1 \times 10^3 = 10^4 = 10\,000;$$

$$100 \times 100 = 10^2 \times 10^2 = 10^4 = 10\,000;$$

$$10\,000 \times 1000 = 10^4 \times 10^3 = 10^7 = 10\,000\,000 \text{ и т. д.}$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями, мы вычитаем показатели, иначе говоря, логарифмы:

$$10\,000 : 1000 = 10^4 : 10^3 = 10^1 = 10;$$
$$100\,000 : \ 100 = 10^5 : 10^2 = 10^3 = 1000.$$

§ 142. Дробные показатели.

Чтобы применять логарифмы к другим числам, кроме точных степеней десяти, мы должны рассмотреть, как различные числа могут быть выражены дробными степенями одного и того же основания—десять.

Мы знаем, что

$$100 = 10^2 \text{ и } 1000 = 10^3$$

Поэтому мы можем предположить, что какое-либо трехзначное число будет представлять собою десять в степени 2 с дробью. Мы можем уяснить себе это следующим рассуждением. Возьмем, напр., 1000. Это—третья степень десяти. Извлекая из 1000 квадратный корень обычным путем, мы получим:

$$\sqrt{1000} = 31{,}62\ldots$$

Извлекая квадратный корень из 10^3 посредством правила показателей мы получим:

$$\sqrt{10^3} = 10^{1,5},$$

так как, обратно, $10^{1,5} \times 10^{1,5} = 10^3 = 1000.$

Таким образом мы можем себе представить, что 1,5 есть логарифм 31,62, так как $10^{1,5} = 31{,}62$.

Извлекая квадратный корень из 10, мы получим 3,162, но, с другой стороны:

$$10^{0,5} \times 10^{0,5} = 10^1 = 10;$$

следовательно: $\sqrt{10} = 10^{0,5}$ и $\sqrt{10} = 3{,}162;$

откуда: $10^{0,5} = 3{,}162.$

Мы можем сказать, что 0,5 есть логарифм числа 3,162, т.-е. показатель той степени, в которую нужно возвысить основание 10, чтобы получить число.

Дробные показатели являются лишь обобщением целых показателей; они не так ясно представляются нашему воображению, но все же, вдумавшись в их смысл, можно представить и их. Если мы извлечем корень четвертой степени, т.-е. два раза подряд квадратный корень из 1000, то мы получим 5,624; но с другой стороны:

$$10^{0,75} \times 10^{0,75} \times 10^{0,75} \times 10^{0,75} = 10^{(4 \times 0,75)} = 10^3 = 1000;$$

следовательно: $\sqrt[4]{1000} = 10^{0,75} = 5,624;$

что даст 0,75 как логарифм 5,624.

Всякое число, посредством довольно сложных вычислений, может быть изображено в виде некоторой, но определенной степени десяти. Все эти степени, расположенные в виде таблицы, составляют логарифмические таблицы, напр.:

$$300 = 10^{2.4771}; \quad 30 = 10^{1.4771}; \quad 3 = 10^{0.4771};$$

$$7290 = 10^{3.8627}; \; 421 = 10^{2.6243} \text{ и т. д.}$$

§ 143. Обыкновенные логарифмы.

Всякое число, отличное от единицы, может быть взято за основание **системы** логарифмов; но для практических целей самым удобным основанием является 10. Таблицы логарифмов с основанием 10 носят название **обыкновенных** или **Бригговых** логарифмов по имени ученого, предложившего их.

Преимущество системы логарифмов с основанием 10 то, что все числа, отличающиеся друг от друга лишь множителями, которые являются целыми степенями 10, имеют логарифмы с одинаковою дробною частью.

Так, числа 3; 30; 300 и т. д. имеют логарифмами, соответственно: 0,4771; 1,4771; 2,4771 и т. д.

Дробная часть логарифма называется его **мантиссой**: в таблицах дается лишь она, так как целая часть логарифма может быть определена в уме. Эта целая часть логарифма называется **характеристикой**; она на единицу меньше знаков числа, считая единицы, десятки и выше. Таким образом, однозначное число имеет для характеристики 0, двухзначное 1, трехзначное 2 и т. д.

Мы можем не считаться с десятичною запятою, или точкою, (что иногда применяют вместо запятой) и переносить ее вправо или влево, т.-е. множить или делить число на целые степени десяти, так как это нисколько не влияет на дробную часть логарифма, даваемую таблицей. Что же касается целой части логарифма, то мы без затруднения находим ее, как объяснено выше. Напр., числа 3,162; 31,62; 316,2 и 3162 имеют мантиссу 0,5. Первое число — однозначное, второе — двухзначное, третье — трехзначное, четвертое — четырехзначное; следовательно, характеристики будут, соответственно: 0,1,2,3 и логарифмы, обозначаемые lg, будут:

$$lg\ 3{,}162 = 0{,}5; \quad lg\ 316{,}2 = 2{,}5;$$

$$lg\ 31{,}26 = 1{,}5; \quad lg\ 316\ 2 = 3{,}5.$$

§ 144. Объяснение логарифмических таблиц.

Таблицы логарифмов, помещенные в этой книге, носят название четырехзначных, так как мантисса всюду дана с четырьмя знаками. Имеются таблицы с 5-ью, 6-ью, 7-ью знаками и более. В столбцах, озаглавленных *no*, стоят числа, начиная со 100 и кончая 1300 (см. стр. 249—254). Справа следуют мантиссы соответствующих логарифмов. Напр., против числа 124 стоит 0934: это значит:

$$lg\,1{,}24 = 0{,}0934; \quad lg\ 124 = 2{,}0934;$$

$$lg\,12{,}4 = 1{,}0934; \quad lg\,1240 = 3{,}0934 \text{ и т. д.}$$

Для проверки себя, убедитесь из таблицы, что:

$$lg\ 112 = 2{,}0492; \quad lg\ 11{,}37 = 1{,}0558;$$

$$lg\ 288 = 2{,}4594; \quad lg\ 1{,}01 = 0{,}0043;$$

$$lg\ 4{,}95 = 0{,}6946; \quad lg\ 9{,}76 = 0{,}9894;$$

$$lg\ 4950 = 3{,}6946; \quad lg\ 97600 = 4{,}9894.$$

Логарифм 10 есть единица, так как $10^1 = 10$.

Вообще: $a^1 = a$ (для основания системы логарифмов).

Логарифм единицы во всякой системе логарифмов есть нуль. Мы можем написать:

$$10^0 = 1; \; a^0 = 1 \text{ (для любого } a\text{)}$$

Доказывается это обобщением правила показателей. Действительно, для любого a и для любого n мы имеем:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0;$$

но, с другой стороны: $a^n : a^n = 1;$

следовательно $a^0 = 1,$

и поэтому $lg\,1 = 0.$

§ 145. Интерполяция.

Когда мы ищем логарифм числа, не находящегося в таблице, то мы должны производить интерполяцию. Объясним это примером.

Допустим, что мы ищем $lg\,2364$; таблицы дают нам непосредственно лишь $lg\,236$ и $lg\,237$.

Отсюда имеем: $lg\,2370 = 3,3747;$

$lg\,2360 = 3,3729;$

на 10 — разница 0,0018;

на 1, следовательно, разница будет: 0,00018,

а на 4, т. к. $2364 - 2360 = 4$, разница $= 4 \times 0,00018 = 0,00072$.

Прибавив к меньшему логарифму 0,0007, получим:

$$lg\,2364 = 3,3736.$$

Для ускорения расчетов имеется добавочная табличка в столбце, озаглавленном *p.p.* (пропорциональных частей). Мы ищем в столбце *p.p.* табличку, соответствующую табличной разности 0,0018, озаглавленную 18; поправка должна быть сделана, как легко понять, на величину 0,4 от этой табличной разности. Вправо от числа 4 в табличке стоит 7,2; отбрасывая дробную часть[1]), мы прибавляем 7 к последнему знаку мантиссы наименьшего логарифма, как и прежде.

[1]) При отбрасывании соблюдается правило, указанное в примечании на стр. 7.

Поупражняйтесь в нахождении следующих логарифмов (проверьте):

$lg\ 3{,}76 = 0{,}5752$; $\quad lg\ 76000 = 4{,}8808$;

$lg\ 9760 = 3{,}9894$; $\quad lg\ 291 = 2{,}4639$;

$lg\ 52{,}30 = 1{,}7185$; $\quad lg\ 27825 = 4{,}4444$.

Излишне производить расчет с точностью больше, чем до четвертой значащей цифры, т. к. таблицы только четырехзначные. При желании иметь большую точность следует пользоваться другими таблицами (5-ти, 6-ти, 7-ми значными).

Если числа содержат более 5 цифр, то при нахождении логарифмов таких многозначных чисел надо все цифры, начиная с шестой, отбросить, заменив их нулями и увеличив пятую цифру на единицу, если первая из отбрасываемых цифр 5 или больше 5.

Сделайте следующие примеры на пользование пропорциональными табличками (проверьте).

$lg\ 15{,}26 = 3{,}1835$; $\quad lg\ 6{,}571 = 0{,}8177$;

$lg\ 29{,}35 = 1{,}4676$; $\quad lg\ 426{,}8 = 2{,}6302$.

§ 146. Антилогарифмы.

Под именем **антилогарифма** разумеют то число, логарифм которого дается. Так напр., $lg\ 2 = 0{,}3010$, а потому число 2 есть антилогарифм 0,3010.

Найти сразу соответствующее число или антилогарифм по данному логарифму часто нельзя без небольшого расчета, подобного тому, который делался ранее при отыскании логарифма четырехзначного числа, не помещенного в таблице. Способ расчета станет ясен из примера и после некоторого упражнения.

Найдите антилогарифм 2,6639, т.-е. то число, логарифм которого = 2,6639.

Из таблицы находим числа и логарифмы, между которыми заключается данный:

$lg\ 462 = 2{,}6646$;

Табличная разность 9. $\quad lg\ 461 = 2{,}6637$.

Действительное ее значение 0,0009

Наш логарифм отличается от меньшего из логарифмов на 0,0002, или, как принято обозначать, на 2.

Таким образом разница между меньшим числом и искомым будет не единица (как между 462 и 461), а часть единицы (в отношении полученных разностей), именно 2/9, т.-е. около 0,2. Следовательно: $lg\ 461{,}2 = 2{,}6639$.

Чтобы сократить вычисление, мы пользуемся столбцом пропорциональных частей *p.p.*

В столбце 9 ищем число, ближе всего подходящее к 2, находим 1,8: про ив него слева стоит 2; это обозначает 0,2; его прибавляем к 461.

При отыскании числа по его логарифму можно на основании табличной разности вычислить любое число цифр для искомого числа, но надо ограничиться нахождением не более шести цифр (можно ограничиться и меньшим числом цифр) и эту шестую цифру отбросить, увеличив пятую на единицу, если шестая равна или больше 5. Вместо отброшенных цифр ставят нули.

§ 147. Умножение посредством логарифмов.

Назовем через x и y два числа, которые требуется перемножить

Пусть: $lg\ x = a$ и $lg\ y = b$.

Согласно с определением логарифма:

$$x = 10^a \text{ и } y = 10^b.$$

Перемножив эти два выражения, находим:

$$xy = 10^{a+b};$$

откуда видно, что

$$lg\ (xy) = a + b = lg\ x + lg\ y.$$

Имеем правило: логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей.

Пример 1. Перемножьте 47,61 и 37,65 посредством логарифмов.

$$lg\ 47{,}61 = 1{,}6777;$$
$$lg\ 37{,}65 = 1{,}5758,$$
$$lg \text{ произ.} = 3{,}2535.$$

Таблица дает нам число 1792.

Пример 2. Найдите произведение:

$$P = 1,75 \times 3,142 \times 1,625.$$

$$\begin{aligned} lg\,1,75 &= 0,2430; \\ lg\,3,142 &= 0,4972; \\ lg\,1,625 &= 0,2109; \\ \hline lg\ P &= 0,9511. \end{aligned}$$

Из таблиц получим:

$$P = 8,935.$$

Пример 3. Найдите произведение $A = 3,142 \times (2,875)^2$.

$$lg\,3,142 = 0,4972; \quad lg\,2,875 = 0,4587;$$
$$2\ lg\,2,875 = 0,9174$$
$$lg\ A = 0,4972 + 0,9174 = 1,4146;$$

откуда $A = 25,98.$

§ 148. Деление посредством логарифмов.

Так как деление есть действие противоположное умножению, то вместо того, чтобы складывать логарифмы, как только что делали, приходится вычитать один из другого. Пусть требуется разделить число x на другое число y, при чем:

$$lg\,x = a \quad \text{и} \quad lg\,y = b,$$

т.-е. $x = 10^a$ и $y = 10^b$.

Разделив последние выражения одно на другое, получим:

$$x : y = 10^{a-b},$$

следовательно: $lg\,(x : y) = a - b = lg\,x - lg\,y.$

Отсюда правило: логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя.

Пример 1. Разделите посредством логарифмов 113,1 на 3,142.

$$\begin{aligned} lg\ 113,1 &= 2,0535; \\ lg\ 3,142 &= 0,4972; \\ \hline lg\ \text{част.} &= 1,5563; \end{aligned}$$

откуда частное = 36.

Пример 2. Вычислите при помощи таблиц выражение:

$$C=\frac{A}{B}=\frac{1{,}725\times 296\times 37{,}5}{429\times 24}.$$

Вычислим логарифмы числителя и знаменателя отдельно и вычтем второй из первого; это даст нам логарифм искомого выражения.

Действительно: $lg\ C = lg\ A - lg\ B$;

$$\begin{array}{ll} lg\,1{,}725 = 0{,}2368; & \\ lg\,296 = 2{,}4713; & lg\,492 = 2{,}6325; \\ lg\,37{,}5 = 1{,}5740; & lg\,24 = 1{,}3802; \\ \hline lg\ A = 4{,}2821; & lg\ B = 4{,}0127; \end{array}$$

$$lg\ C = 4{,}2821 - 4{,}0127 = 0{,}2694;$$

откуда $C = 1{,}86$.

Задачи.

198. Найдите логарифмы следующих чисел:

a). 12,6; *b*) 1,38; *c*) 4826; *d*) 279000; *e*) 49237; *f*) 123,4; *g*) 2 795 000 000.

199. Найдите антилогарифмы, т.-е. числа, соответствующие следующим логарифмам:

a) 2,7240; *b*) 0,4239; *c*) 6,2780; *d*) 4,0172; *e*) 0,7364; *f*) 5,2173; *g*) 8,2760.

200. Найдите посредством логарифмов произведение

$$7582\times 3791.$$

201. Найдите: $382{,}1\times 74{,}83\times 2743$.

202. Разделите 345,8 на 86,27 посредством логарифмов.

203. Найдите при помощи таблиц величину:

$$\frac{4763\times 2896\times 2872}{8641\times 738{,}6\times 564}.$$

204. При составлении инвентаря нашли 2320 чугунных отливок известного образца, весящих по 2,87 килогр. каждая. Сколько это составит при цене за кило в 8,33 копейки (золотом). (Пользуйтесь таблицами логарифмов.)

205. Определите стоимость 256 погонных метров стальных прутьев, весящих 9,41 кило в погонном метре, при цене за кило в 6,95 копейки (золотом).

206. При вычислении мощности N одного газового двигателя в лош. силах получили следующее выражение:

$$N \text{ лош. сил} = \frac{81,5 \times 1,333 \times 113,1 \times 130}{33000}.$$

Определите при помощи логарифмов это число.

207. Найти в кв. метрах поверхность нагрева s при следующих данных: мощность машины = 225 лош. сил; на 1 лош. сил требуется 11,8 кгр. пара в час; 1 кв. м. поверхности нагрева доставляет 23,5 кгр. пара в час.

ТАБЛИЦЫ ЛОГАРИФМОВ.

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.
100	0000	43	150	1761	29	200	3010	22	250	3979	18
101	0043	43	151	1790	28	201	3032	22	251	3997	17
102	0086	42	152	1818	29	202	3054	21	252	4014	17
103	0128	42	153	1847	28	203	3075	21	253	4031	17
104	0170	42	154	1875	28	204	3096	22	254	4048	17
105	0212	41	155	1903	28	205	3118	21	255	4065	17
106	0253	41	156	1931	28	206	3139	21	256	4082	17
107	0294	40	157	1959	28	207	3160	21	257	4099	17
108	0334	40	158	1987	27	208	3181	20	258	4116	17
109	0374	40	159	2014	27	209	3201	21	259	4133	17
110	0414	39	160	2041	27	210	3222	21	260	4150	16
111	0453	39	161	2068	27	211	3243	20	261	4166	17
112	0492	39	162	2095	27	212	3263	21	262	4183	17
113	0531	38	163	2122	26	213	3284	20	263	4200	16
114	0569	38	164	2148	27	214	3304	20	264	4216	16
115	0607	38	165	2175	26	215	3324	21	265	4232	17
116	0645	37	166	2201	26	216	3345	20	266	4249	16
117	0682	37	167	2227	26	217	3365	20	267	4265	16
118	0719	36	168	2253	26	218	3385	19	268	4281	17
119	0755	37	169	2279	25	219	3404	20	269	4298	16
120	0792	36	170	2304	26	220	3424	20	270	4314	16
121	0828	36	171	2330	25	221	3444	20	271	4330	16
122	0864	35	172	2355	25	222	3464	19	272	4346	16
123	0899	35	173	2380	25	223	3483	19	273	4362	16
124	0934	35	174	2405	25	224	3502	20	274	4378	15
125	0969	35	175	2430	25	225	3522	19	275	4393	16
126	1004	34	176	2455	25	226	3541	19	276	4409	16
127	1038	34	177	2480	24	227	3560	19	277	4425	15
128	1072	34	178	2504	25	228	3579	19	278	4440	16
129	1106	33	179	2529	24	229	3598	19	279	4456	16
130	1139	34	180	2553	24	230	3617	19	280	4472	15
131	1173	33	181	2577	24	231	3636	19	281	4487	15
132	1206	33	182	2601	24	232	3655	19	282	4502	16
133	1239	32	183	2625	23	233	3674	18	283	4518	15
134	1271	32	184	2648	24	234	3692	19	284	4533	15
135	1303	32	185	2672	23	235	3711	18	285	4548	16
136	1335	32	186	2695	23	236	3729	18	286	4564	15
137	1367	32	187	2718	24	237	3747	19	287	4579	15
138	1399	31	188	2742	23	238	3766	18	288	4594	15
139	1430	31	189	2765	23	239	3784	18	289	4609	15
140	1461	31	190	2788	22	240	3802	18	290	4624	15
141	1492	31	191	2810	23	241	3820	18	291	4639	15
142	1523	30	192	2833	23	242	3838	18	292	4654	15
143	1553	31	193	2856	22	243	3856	18	293	4669	14
144	1584	30	194	2878	22	244	3874	18	294	4683	15
145	1614	30	195	2900	23	245	3892	17	295	4698	15
146	1644	29	196	2923	22	246	3909	18	296	4713	15
147	1673	30	197	2945	22	247	3927	18	297	4728	14
148	1703	29	198	2967	22	248	3945	17	298	4742	15
149	1732	29	199	2989	21	249	3962	17	299	4757	14
150	1761		200	3010		250	3979		300	4771	

pp.

	43	42	41
1	4.3	4.2	4.1
2	8.6	8.4	8.2
3	12.9	12.6	12.3
4	17.2	16.8	16.4
5	21.5	21.0	20.5
6	25.8	25.2	24.6
7	30.1	29.4	28.7
8	34.4	33.6	32.8
9	38.7	37.8	36.9

	40	39	38
1	4.0	3.9	3.8
2	8.0	7.8	7.6
3	12.0	11.7	11.4
4	16.0	15.6	15.2
5	20.0	19.5	19.0
6	24.0	23.4	22.8
7	28.0	27.3	26.6
8	32.0	31.2	30.4
9	36.0	35.1	34.2

	37	36	35
1	3.7	3.6	3.5
2	7.4	7.2	7.0
3	11.1	10.8	10.5
4	14.8	14.4	14.0
5	18.5	18.0	17.5
6	22.2	21.6	21.0
7	25.9	25.2	24.5
8	29.6	28.8	28.0
9	33.3	32.4	31.5

	34	33	32
1	3.4	3.3	3.2
2	6.8	6.6	6.4
3	10.2	9.9	9.6
4	13.6	13.2	12.8
5	17.0	16.5	16.0
6	20.4	19.8	19.2
7	23.8	23.1	22.4
8	27.2	26.4	25.6
9	30.6	29.7	28.8

	31	30	29
1	3.1	3.0	2.9
2	6.2	6.0	5.8
3	9.3	9.0	8.7
4	12.4	12.0	11.6
5	15.5	15.0	14.5
6	18.6	18.0	17.4
7	21.7	21.0	20.3
8	24.8	24.0	23.2
9	27.9	27.0	26.1

	28	27	26
1	2.8	2.7	2.6
2	5.6	5.4	5.2
3	8.4	8.1	7.8
4	11.2	10.8	10.4
5	14.0	13.5	13.0
6	16.8	16.2	15.6
7	19.6	18.9	18.2
8	22.4	21.6	20.8
9	25.2	24.3	23.4

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.
300	4771	15	350	5441	12	400	6021	10	450	6532	10
301	4786	14	351	5453	12	401	6031	11	451	6542	9
302	4800	14	352	5465	13	402	6042	11	452	6551	10
303	4814	15	353	5478	12	403	6053	11	453	6561	10
304	4829	14	354	5490	12	404	6064	11	454	6571	9
305	4843	14	355	5502	12	405	6075	10	455	6580	10
306	4857	14	356	5514	13	406	6085	11	456	6590	9
307	4871	15	357	5527	12	407	6096	11	457	6599	10
308	4886	14	358	5539	12	408	6107	10	458	6609	9
309	4900	14	359	5551	12	409	6117	11	459	6618	10
310	4914	14	360	5563	12	410	6128	10	460	6628	9
311	4928	14	361	5575	12	411	6138	11	461	6637	9
312	4942	13	362	5587	12	412	6149	11	462	6646	10
313	4955	14	363	5599	12	413	6160	10	463	6656	9
314	4969	14	364	5611	12	414	6170	10	464	6665	10
315	4983	14	365	5623	12	415	6180	11	465	6675	9
316	4997	14	366	5635	12	416	6191	10	466	6684	9
317	5011	13	367	5647	11	417	6201	11	467	6693	9
318	5024	14	368	5658	12	418	6212	10	468	6702	10
319	5038	13	369	5670	12	419	6222	10	469	6712	9
320	5051	14	370	5682	12	420	6232	11	470	6721	9
321	5065	14	371	5694	11	421	6243	10	471	6730	9
322	5079	13	372	5705	12	422	6253	10	472	6739	10
323	5092	13	373	5717	12	423	6263	11	473	6749	9
324	5105	14	374	5729	11	424	6274	10	474	6758	9
325	5119	13	375	5740	12	425	6284	10	475	6767	9
326	5132	13	376	5752	11	426	6294	10	476	6776	9
327	5145	14	377	5763	12	427	6304	10	477	6785	9
328	5159	13	378	5775	11	428	6314	11	478	6794	9
329	5172	13	379	5786	12	429	6325	10	479	6803	9
330	5185	13	380	5798	11	430	6335	10	480	6812	9
331	5198	13	381	5809	12	431	6345	10	481	6821	9
332	5211	13	382	5821	11	432	6355	10	482	6830	9
333	5224	13	383	5832	11	433	6365	10	483	6839	9
334	5237	13	384	5843	12	434	6375	10	484	6848	9
335	5250	13	385	5855	11	435	6385	10	485	6857	9
336	5263	13	386	5866	11	436	6395	10	486	6866	9
337	5276	13	387	5877	11	437	6405	10	487	6875	9
338	5289	13	388	5888	11	438	6415	10	488	6884	9
339	5302	13	389	5899	12	439	6425	10	489	6893	9
340	5315	13	390	5911	11	440	6435	9	490	6902	9
341	5328	12	391	5922	11	441	6444	10	491	6911	9
342	5340	13	392	5933	11	442	6454	10	492	6920	8
343	5353	13	393	5944	11	443	6464	10	493	6928	9
344	5366	12	394	5955	11	444	6474	10	494	6937	9
345	5378	13	395	5966	11	445	6484	9	495	6946	9
346	5391	12	396	5977	11	446	6493	10	496	6955	9
347	5403	13	397	5988	11	447	6503	10	497	6964	8
348	5416	12	398	5999	11	448	6513	9	498	6972	9
349	5428	13	399	6010	11	449	6522	10	499	6981	9
350	5441		400	6021		450	6532		500	6990	

pp.

	25	24	23	22	21	20	19	18	17
1	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	1.9	1.8	1.7
2	5.0	4.8	4.6	4.4	4.2	4.0	3.8	3.6	3.4
3	7.5	7.2	6.9	6.6	6.3	6.0	5.7	5.4	5.1
4	10.0	9.6	9.2	8.8	8.4	8.0	7.6	7.2	6.8
5	12.5	12.0	11.5	11.0	10.5	10.0	9.5	9.0	8.5
6	15.0	14.4	13.8	13.2	12.6	12.0	11.4	10.8	10.2
7	17.5	16.8	16.1	15.4	14.7	14.0	13.3	12.6	11.9
8	20.0	19.2	18.4	17.6	16.8	16.0	15.2	14.4	13.6
9	22.5	21.6	20.7	19.8	18.9	18.0	17.1	16.2	15.3

	16	15	14	13	12	11	10	9	8
1	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8
2	3.2	3.0	2.8	2.6	2.4	2.2	2.0	1.8	1.6
3	4.8	4.5	4.2	3.9	3.6	3.3	3.0	2.7	2.4
4	6.4	6.0	5.6	5.2	4.8	4.4	4.0	3.6	3.2
5	8.0	7.5	7.0	6.5	6.0	5.5	5.0	4.5	4.0
6	9.6	9.0	8.4	7.8	7.2	6.6	6.0	5.4	4.8
7	11.2	10.5	9.8	9.1	8.4	7.7	7.0	6.3	5.6
8	12.8	12.0	11.2	10.4	9.6	8.8	8.0	7.2	6.4
9	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	9.9	9.0	8.1	7.2

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.
500	6990	8	550	7404	8	600	7782	7	650	8129	7
501	6998	9	551	7412	7	601	7789	7	651	8136	6
502	7007	9	552	7419	8	602	7796	7	652	8142	7
503	7016	8	553	7427	8	603	7803	7	653	8149	7
504	7024	9	554	7435	8	604	7810	8	654	8156	6
505	7033	9	555	7443	8	605	7818	7	655	8162	7
506	7042	8	556	7451	8	606	7825	7	656	8169	7
507	7050	9	557	7459	7	607	7832	7	657	8176	6
508	7059	8	558	7466	8	608	7839	7	658	8182	7
509	7067	9	559	7474	8	609	7846	7	659	8189	6
510	7076	8	560	7482	8	610	7853	7	660	8195	7
511	7084	9	561	7490	7	611	7860	8	661	8202	7
512	7093	8	562	7497	8	612	7868	7	662	8209	6
513	7101	9	563	7505	8	613	7875	7	663	8215	7
514	7110	8	564	7513	7	614	7882	7	664	8222	6
515	7118	8	565	7520	8	615	7889	7	665	8228	7
516	7126	9	566	7528	8	616	7896	7	666	8235	6
517	7135	8	567	7536	7	617	7903	7	667	8241	7
518	7143	9	568	7543	8	618	7910	7	668	8248	6
519	7152	8	569	7551	8	619	7917	7	669	8254	7
520	7160	8	570	7559	7	620	7924	7	670	8261	6
521	7168	9	571	7566	8	621	7931	7	671	8267	7
522	7177	8	572	7574	8	622	7938	7	672	8274	6
523	7185	8	573	7582	7	623	7945	7	673	8280	7
524	7193	9	574	7589	8	624	7952	7	674	8287	6
525	7202	8	575	7597	7	625	7959	7	675	8293	6
526	7210	8	576	7604	8	626	7966	7	676	8299	7
527	7218	8	577	7612	7	627	7973	7	677	8306	6
528	7226	9	578	7619	8	628	7980	7	678	8312	7
529	7235	8	579	7627	7	629	7987	6	679	8319	6
530	7243	8	580	7634	8	630	7993	7	680	8325	6
531	7251	8	581	7642	7	631	8000	7	681	8331	7
532	7259	8	582	7649	8	632	8007	7	682	8338	6
533	7267	8	583	7657	7	633	8014	7	683	8344	7
534	7275	9	584	7664	8	634	8021	7	684	8351	6
535	7284	8	585	7672	7	635	8028	7	685	8357	6
536	7292	8	586	7679	7	636	8035	6	686	8363	7
537	7300	8	587	7686	8	637	8041	7	687	8370	6
538	7308	8	588	7694	7	638	8048	7	688	8376	6
539	7316	8	589	7701	8	639	8055	7	689	8382	6
540	7324	8	590	7709	7	640	8062	7	690	8388	7
541	7332	8	591	7716	7	641	8069	6	691	8395	6
542	7340	8	592	7723	8	642	8075	7	692	8401	6
543	7348	8	593	7731	7	643	8082	7	693	8407	7
544	7356	8	594	7738	7	644	8089	7	694	8414	6
545	7364	8	595	7745	7	645	8096	6	695	8420	6
546	7372	8	596	7752	8	646	8102	7	696	8426	6
547	7380	8	597	7760	7	647	8109	7	697	8432	7
548	7388	8	598	7767	7	648	8116	6	698	8439	6
549	7396	8	599	7774	8	649	8122	7	699	8445	6
550	7404		600	7782		650	8129		700	8451	

pp.

	9	8
1	0.9	0.8
2	1.8	1.6
3	2.7	2.4
4	3.6	3.2
5	4.5	4.0
6	5.4	4.8
7	6.3	5.6
8	7.2	6.4
9	8.1	7.2

	7	6
1	0.7	0.6
2	1.4	1.2
3	2.1	1.8
4	2.8	2.4
5	3.5	3.0
6	4.2	3.6
7	4.9	4.2
8	5.6	4.8
9	6.3	5.4

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.
700	8451	6	750	8751	5	800	9031	5	850	9294	5
701	8457	6	751	8756	6	801	9036	6	851	9299	5
702	8463	7	752	8762	6	802	9042	5	852	9304	5
703	8470	6	753	8768	6	803	9047	6	853	9309	6
704	8476	6	754	8774	5	804	9053	5	854	9315	5
705	8482	6	755	8779	6	805	9058	5	855	9320	5
706	8488	6	756	8785	6	806	9063	6	856	9325	5
707	8494	6	757	8791	6	807	9069	5	857	9330	5
708	8500	6	758	8797	5	808	9074	5	858	9335	5
709	8506	7	759	8802	6	809	9079	6	859	9340	5
710	8513	6	760	8808	6	810	9085	5	860	9345	5
711	8519	6	761	8814	6	811	9090	6	861	9350	5
712	8525	6	762	8820	5	812	9096	5	862	9355	5
713	8531	6	763	8825	6	813	9101	5	863	9360	5
714	8537	6	764	8831	6	814	9106	6	864	9365	5
715	8543	6	765	8837	5	815	9112	5	865	9370	5
716	8549	6	766	8842	6	816	9117	5	866	9375	5
717	8555	6	767	8848	6	817	9122	6	867	9380	5
718	8561	6	768	8854	5	818	9128	5	868	9385	5
719	8567	6	769	8859	6	819	9133	5	869	9390	5
720	8573	6	770	8865	6	820	9138	5	870	9395	5
721	8579	6	771	8871	5	821	9143	6	871	9400	5
722	8585	6	772	8876	6	822	9149	5	872	9405	5
723	8591	6	773	8882	5	823	9154	5	873	9410	5
724	8597	6	774	8887	6	824	9159	6	874	9415	5
725	8603	6	775	8893	6	825	9165	5	875	9420	5
726	8609	6	776	8899	5	826	9170	5	876	9425	5
727	8615	6	777	8904	6	827	9175	5	877	9430	5
728	8621	6	778	8910	5	828	9180	6	878	9435	5
729	8627	6	779	8915	6	829	9186	5	879	9440	5
730	8633	6	780	8921	6	830	9191	5	880	9445	5
731	8639	6	781	8927	5	831	9196	5	881	9450	5
732	8645	6	782	8932	6	832	9201	5	882	9455	5
733	8651	6	783	8938	5	833	9206	6	883	9460	5
734	8657	6	784	8943	6	834	9212	5	884	9465	4
735	8663	6	785	8949	5	835	9217	5	885	9469	5
736	8669	6	786	8954	6	836	9222	5	886	9474	5
737	8675	6	787	8960	5	837	9227	5	887	9479	5
738	8681	5	788	8965	6	838	9232	6	888	9484	5
739	8686	6	789	8971	5	839	9238	5	889	9489	5
740	8692	6	790	8976	6	840	9243	5	890	9494	5
741	8698	6	791	8982	5	841	9248	5	891	9499	5
742	8704	6	792	8987	6	842	9253	5	892	9504	5
743	8710	6	793	8993	5	843	9258	5	893	9509	4
744	8716	6	794	8998	6	844	9263	6	894	9513	5
745	8722	5	795	9004	5	845	9269	5	895	9518	5
746	8727	6	796	9009	6	846	9274	5	896	9523	5
747	8733	6	797	9015	5	847	9279	5	897	9528	5
748	8739	6	798	9020	5	848	9284	5	898	9533	5
749	8745	6	799	9025	6	849	9289	5	899	9538	4
750	8751		800	9031		850	9294		900	9542	

pp.

	7	6	5	4
1	0.7	0.6	0.5	0.4
2	1.4	1.2	1.0	0.8
3	2.1	1.8	1.5	1.2
4	2.8	2.4	2.0	1.6
5	3.5	3.0	2.5	2.0
6	4.2	3.6	3.0	2.4
7	4.9	4.2	3.5	2.8
8	5.6	4.8	4.0	3.2
9	6.3	5.4	4.5	3.6

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.
900	9542	5	950	9777	5	1000	0000	4	1050	0212	4
901	9547	5	951	9782	4	1001	0004	5	1051	0216	4
902	9552	5	952	9786	5	1002	0009	4	1052	0220	4
903	9557	5	953	9791	4	1003	0013	4	1053	0224	4
904	9562	4	954	9795	5	1004	0017	5	1054	0228	5
905	9566	5	955	9800	5	1005	0022	4	1055	0233	4
906	9571	5	956	9805	4	1006	0026	4	1056	0237	4
907	9576	5	957	9809	5	1007	0030	5	1057	0241	4
908	9581	5	958	9814	4	1008	0035	4	1058	0245	4
909	9586	4	959	9818	5	1009	0039	4	1059	0249	4
910	9590	5	960	9823	4	1010	0043	5	1060	0253	4
911	9595	5	961	9827	5	1011	0048	4	1061	0257	4
912	9600	5	962	9832	4	1012	0052	4	1062	0261	4
913	9605	4	963	9836	5	1013	0056	4	1063	0265	4
914	9609	5	964	9841	4	1014	0060	5	1064	0269	4
915	9614	5	965	9845	5	1015	0065	4	1065	0273	5
916	9619	5	966	9850	4	1016	0069	4	1066	0278	4
917	9624	4	967	9854	5	1017	0073	4	1067	0282	4
918	9628	5	968	9859	4	1018	0077	5	1068	0286	4
919	9633	5	969	9863	5	1019	0082	4	1069	0290	4
920	9638	5	970	9868	4	1020	0086	4	1070	0294	4
921	9643	4	971	9872	5	1021	0090	5	1071	0298	4
922	9647	5	972	9877	4	1022	0095	4	1072	0302	4
923	9652	5	973	9881	5	1023	0099	4	1073	0306	4
924	9657	4	974	9886	4	1024	0103	4	1074	0310	4
925	9661	5	975	9890	4	1025	0107	4	1075	0314	4
926	9666	5	976	9894	5	1026	0111	5	1076	0318	4
927	9671	4	977	9899	4	1027	0116	4	1077	0322	4
928	9675	5	978	9903	5	1028	0120	4	1078	0326	4
929	9680	5	979	9908	4	1029	0124	4	1079	0330	4
930	9685	4	980	9912	5	1030	0128	5	1080	0334	4
931	9689	5	981	9917	4	1031	0133	4	1081	0338	4
932	9694	5	982	9921	5	1032	0137	4	1082	0342	4
933	9699	4	983	9926	4	1033	0141	4	1083	0346	4
934	9703	5	984	9930	4	1034	0145	4	1084	0350	4
935	9708	5	985	9934	5	1035	0149	5	1085	0354	4
936	9713	4	986	9939	4	1036	0154	4	1086	0358	4
937	9717	5	987	9943	5	1037	0158	4	1087	0362	4
938	9722	5	988	9948	4	1038	0162	4	1088	0366	4
939	9727	4	989	9952	4	1039	0166	4	1089	0370	4
940	9731	5	990	9956	5	1040	0170	5	1090	0374	4
941	9736	5	991	9961	4	1041	0175	4	1091	0378	4
942	9741	4	992	9965	4	1042	0179	4	1092	0382	4
943	9745	5	993	9969	5	1043	0183	4	1093	0386	4
944	9750	4	994	9974	4	1044	0187	4	1094	0390	4
945	9754	5	995	9978	5	1045	0191	4	1095	0394	4
946	9759	4	996	9983	4	1046	0195	4	1096	0398	4
947	9763	5	997	9987	4	1047	0199	5	1097	0402	4
948	9768	5	998	9991	5	1048	0204	4	1098	0406	4
949	9773	4	999	9996	4	1049	0208	4	1099	0410	4
950	9777		1000	0000		1050	0212		1100	0414	

pp.

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.	no.	lg.	d.
1100	0414	4	1150	0607	4	1200	0792	3	1250	0969	4
1101	0418	4	1151	0611	4	1201	0795	4	1251	0973	3
1102	0422	4	1152	0615	3	1202	0799	4	1252	0976	4
1103	0426	4	1153	0618	4	1203	0803	3	1253	0980	3
1104	0430	4	1154	0622	4	1204	0806	4	1254	0983	3
1105	0434	4	1155	0626	4	1205	0810	3	1255	0986	4
1106	0438	3	1156	0630	3	1206	0813	4	1256	0990	3
1107	0441	4	1157	0633	4	1207	0817	4	1257	0993	4
1108	0445	4	1158	0637	4	1208	0821	3	1258	0997	3
1109	0449	4	1159	0641	4	1209	0824	4	1259	1000	4
1110	0453	4	1160	0645	3	1210	0828	3	1260	1004	3
1111	0457	4	1161	0648	4	1211	0831	4	1261	1007	4
1112	0461	4	1162	0652	4	1212	0835	4	1262	1011	3
1113	0465	4	1163	0656	4	1213	0839	3	1263	1014	3
1114	0469	4	1164	0660	3	1214	0842	4	1264	1017	4
1115	0473	4	1165	0663	4	1215	0846	3	1265	1021	3
1116	0477	4	1166	0667	4	1216	0849	4	1266	1024	4
1117	0481	3	1167	0671	3	1217	0853	3	1267	1028	3
1118	0484	4	1168	0674	4	1218	0856	4	1268	1031	4
1119	0488	4	1169	0678	4	1219	0860	4	1269	1035	3
1120	0492	4	1170	0682	4	1220	0864	3	1270	1038	3
1121	0496	4	1171	0686	3	1221	0867	4	1271	1041	4
1122	0500	4	1172	0689	4	1222	0871	3	1272	1045	3
1123	0504	4	1173	0693	4	1223	0874	4	1273	1048	4
1124	0508	4	1174	0697	3	1224	0878	3	1274	1052	3
1125	0512	3	1175	0700	4	1225	0881	4	1275	1055	4
1126	0515	4	1176	0704	4	1226	0885	3	1276	1059	3
1127	0519	4	1177	0708	3	1227	0888	4	1277	1062	3
1128	0523	4	1178	0711	4	1228	0892	4	1278	1065	4
1129	0527	4	1179	0715	4	1229	0896	3	1279	1069	3
1130	0531	4	1180	0719	3	1230	0899	4	1280	1072	3
1131	0535	3	1181	0722	4	1231	0903	3	1281	1075	4
1132	0538	4	1182	0726	4	1232	0906	4	1282	1079	3
1133	0542	4	1183	0730	4	1233	0910	3	1283	1082	4
1134	0546	4	1184	0734	3	1234	0913	4	1284	1086	3
1135	0550	4	1185	0737	4	1235	0917	3	1285	1089	3
1136	0554	4	1186	0741	4	1236	0920	4	1286	1092	4
1137	0558	3	1187	0745	3	1237	0924	3	1287	1096	3
1138	0561	4	1188	0748	4	1238	0927	4	1288	1099	4
1139	0565	4	1189	0752	3	1239	0931	3	1289	1103	3
1140	0569	4	1190	0755	4	1240	0934	4	1290	1106	3
1141	0573	4	1191	0759	4	1241	0938	3	1291	1109	4
1142	0577	3	1192	0763	3	1242	0941	4	1292	1113	3
1143	0580	4	1193	0766	4	1243	0945	3	1293	1116	3
1144	0584	4	1194	0770	4	1244	0948	4	1294	1119	4
1145	0588	4	1195	0774	3	1245	0952	3	1295	1123	3
1146	0592	4	1196	0777	4	1246	0955	4	1296	1126	3
1147	0596	3	1197	0781	4	1247	0959	3	1297	1129	4
1148	0599	4	1198	0785	3	1248	0962	4	1298	1133	3
1149	0603	4	1199	0788	4	1249	0966	3	1299	1136	3
1150	0607		1200	0792		1250	0969		1300	1139	

pp.

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

	3
1	0.3
2	0.6
3	0.9
4	1.2
5	1.5
6	1.8
7	2.1
8	2.4
9	2.7

ГЛАВА XX.

Логарифмы десятичных дробей, степеней и корней.

§ 149. Логарифмы десятичных дробей.

В предыдущей главе мы видели, что характеристика логарифма на единицу меньше знаков в числе, считая знаки единиц, десятков и выше.

Однозначное число, т.-е. заключающееся между 1 и 10, имеет характеристику 0.

Если десятичная дробь меньше единицы, то характеристика ее логарифма должна быть меньше нуля, т.-е. должна быть отрицательной величиной; что же касается мантиссы, то она та же самая, как будто десятичные знаки изображают целое число.

Поэтому логарифм десятичной дроби состоит из двух частей: отрицательной характеристики и положительной мантиссы, что нужно твердо помнить.

Найдем, напр., логарифм 0,234.

Напишем эту дробь так:

$$2{,}34 : 10;$$

$$lg\,0{,}234 = lg\,2{,}34 - lg\,10.$$

Из таблиц находим:

$$lg\,\;2{,}34 = 0{,}3692;$$

но $$lg\,\;10 = 1;$$

следовательно: $$lg\,0{,}234 = 0{,}3692 - 1;$$

это пишется в виде: $$lg\,0{,}234 = \bar{1}{,}3692.$$

Если мы имеем десятичную дробь 0,0234, то напишем ее так:

$$2{,}34 : 100,$$

т. к. $\quad lg\,100 = 2,$

то $\quad lg\,0{,}0234 = lg\,2{,}34 - 2 = \bar{2}{,}3692.$

Для десятичной дроби 0,00234, имеем:

$$lg\,0{,}00234 = lg\,2{,}34 - lg\,1000,$$

т. е. $\quad 0{,}3692 - 3,$

или условно $\quad lg\,0{,}00234 = \bar{3}{,}3692.$

Таким образом легко вывести правило, что характеристика правильной десятичной дроби — отрицательна, а по величине равна числу нулей перед первой значащей цифрой (считая и нуль перед запятой). Мантисса *положительна* и *получается* из таблиц, при чем не обращают никакого внимания на десятичную запятую.

Так как логарифм правильной десятичной дроби состоит из двух частей: одной отрицательной, а другой положительной, то при расчетах нужно производить действия над ними отдельно, как при смешанных числах в арифметике. Для упрощения часто поступают следующим образом: вместо того, чтобы написать отрицательную характеристику, мы прибавляем и отнимаем от логарифма произвольное целое число, проще всего 10.

Это даст для выше рассмотренных случаев:

$$lg\,0{,}234 = \bar{1}{,}3692 = 0{,}3692 - 1 = 9{,}3692 - 10;$$

$$lg\,0{,}0234 = \bar{2}{,}3692 = 0{,}3692 - 2 = 8{,}3692 - 10;$$

$$lg\,0{,}00234 = \bar{3}{,}3692 = 0{,}3692 - 3 = 7{,}3693 - 10 \text{ и т. д.}$$

Мы могли бы прибавить 20, 30, 100 и, вообще, любое число. Чтобы определить по такой двойной характеристике число нулей в десятичной дроби, нужно найти разность между прибавленным целым числом и новой характеристикой.

Пример 1. Найдите произведение:

$$P = 327{,}6 \times 0{,}0729 \times 0{,}0028;$$

$$lg\,327{,}6 = 2{,}5153;$$

$$lg\,0{,}0729 = 8{,}8627 - 10;$$

$$lg\,0{,}0028 = 7{,}4472 - 10;$$

$$lg\,P = 18{,}8252 - 20 \text{ или } 8{,}8252 - 10,$$

или еще $\quad lg\,P = \bar{2}{,}8252.$

Из таблиц мы находим:

$$P = 0,06687$$

Пример 2. Найдите частное $A = \frac{825}{0,00872}$.

$$\begin{array}{ll} lg\,825 = 2,9165 \text{ или } 12\,9165 - 10; \\ lg\,0,00872 \qquad = 7,9405 - 10; \\ \hline lg\ A \qquad\qquad = 4,9760. \end{array}$$

Тут мы прибавили и вычли 10 даже из положительной характеристики первого числа, но затем при вычитании второго логарифма из первого обе отрицательные десятки пропали, и логарифм частного оказался с положительной характеристикой 4, указывающей на то, что ответ должен быть пятизначным числом, а именно 94620.

Пример 3. Найти частное: $B = \frac{0,000276}{6930}$.

$$\begin{array}{ll} lg\,0,000276 = 6,4409 - 10; \\ lg\,6930 \qquad = 3,8407 \qquad ; \\ \hline lg\ B \qquad\quad = 2,6002 - 10, \end{array}$$

$B = 0,000\,000\,039\,83$ — с восемью нулями, считая 0 перед запятой, т. к. $10 - 2 = 8$.

Пример 4. Вычислите $C = \frac{327,6}{0,08274}$.

$$\begin{array}{ll} lg\ 327,6 = 2,5153 = 12,5153 - 10; \\ lg\,0,08274 \qquad\qquad = 8,9177 - 10; \\ \hline lg\ C \qquad\qquad\qquad = 3,5976. \end{array}$$

откуда $C = 3959$

§ 150. Степени и корни.

Так как квадрат числа равен этому числу, помноженному самому на себя, то вместо того, чтобы сложить одинаковые логарифмы, можно помножить логарифм числа на два, что даст логарифм второй степени.

Легко видеть также, что логарифм третьей степени числа равен утроенному логарифму этого числа и т. п.

Правило. Логарифм степени равен показателю степени, помноженному на логарифм возвышаемого в эту степень числа.

Пример 1. Определите $A = 271^3$.

Имеем:

$$lg\ A = 3\ log\ 271;$$
$$lg\ 271 = 2{,}4330$$
$$\times 3$$
$$lg\ A = 7{,}2990;$$
$$A = 19\ 900\ 000.$$

Пример 2. Найдите $B = 0{,}000876^3$.

$$lg\ B = 3\ log\ 0{,}000876;$$
$$lg\ 0{,}000876 = 6{,}9425 - 10$$
$$\times 3$$
$$lg\ B = 20{,}8275 - 30 = 0{,}8275 - 10.$$

Число должно иметь десять нулей, считая 0 перед запятой; следовательно: $B = 0{,}000\ 000\ 000\ 6722$.

Перейдем к корням. Квадратный корень есть число, которое, будучи помножено само на себя, даст подкоренное количество; следонательно логарифм подкоренного количества вдвое больше против искомого логарифма корня; таким образом логарифм квадратного корня равен половине логарифма подкоренного количества.

Подобным же образом, логарифм корня третьей степени равен одной трети логарифма подкоренного количества, и вообще:

логарифм корня равен логарифму подкоренного количества, деленному на показателя корня.

Пример 1. Найдите $A = \sqrt{324{,}9}$.

$$lg\ A = \tfrac{1}{2}\ lg\ 324{,}9;$$
$$lg\ 324{,}9 = 2{,}5118;$$
$$lg\ A = \tfrac{1}{2} \times 2{,}5118 = 1{,}2559;$$

откуда $A = 18{,}03$.

Пример 2. Определите диаметр круга D площадью 86 кв. см.

$$A = 0{,}7854\ D^2;$$

следовательно:

$$D = \sqrt{\frac{A}{0{,}7854}} = \sqrt{\frac{86}{0{,}7854}}.$$

Определим логарифм подкоренного количества и затем разделим результат на два; это бу ет логарифм корня.

$$\begin{aligned} lg\,86 &= 1{,}9345 = 11{,}9345 - 10; \\ lg\,0{,}7854 &= \ 9{,}8945 - 10; \\ \hline lg\text{ подкор. кол.} &= 2{,}0400; \\ lg\text{ корня} &= 1{,}0200; \\ D &= 10{,}472. \end{aligned}$$

Пример 3. Найдите $\sqrt[3]{0{,}0000732}$.

$$\text{Имеем: } lg\,0{,}0000732 = 5{,}8645 - 10.$$

Удобнее написать это выражение так:

$$lg\,0{,}0000732 = 25{,}8645 - 30.$$

Но этот логарифм надо разделить на три, что даст:

$$lg\text{ корня} = 8{,}6215 - 10,$$

и, следовательно: $\text{корень} = 0{,}04183$.

§ 151. Дробные показатели.

Иногда приходится иметь дело в технике с дробными показателями, как, напр., в формуле, дающей давление сжатой газовой смеси в цилиндре двигателя внутреннего сгорания:

$$p_2 = p_1\,k^{1,28},$$

где p_1 есть первоначальное давление, напр., 1 кгр. на кв. см., k — степень сжатия, напр., 5, что указывает, во сколько раз объем смеси должен быть меньше первоначального объема, а p_2—окончательное искомое давление газовой смеси.

В нашем примере выражение:

$$p_2 = 1 \times 5^{1,28}$$

может быть вычислено только при помощи логарифмов:

$$\begin{aligned} lg\,p_2 &= lg\,(5^{1,28}) = 1{,}28\,lg\,5 \\ lg\,5 &= 0{,}6990 \\ &\times 1{,}28 \\ \hline lg\,p_2 &= 0{,}8947 \end{aligned}$$

откуда $p_2 = 7{,}847$ кгр. на кв. см.

§ 152. Логарифмы тригонометрических функций.

Так как во всех почти задачах, в которые входят тригонометрические функции, с ними приходится производить действия умножения или деления, то для облегчения этих операций существуют готовые таблицы логарифмов тригонометрических функций. Эти таблицы не надо смешивать с теми таблицами самих тригонометрических функций, которые даны в этой книге (стр. 185—192). Приведенные выше таблицы, называются таблицами натуральных величин тригонометрических функций.

Задачи

208. Найдите логарифмы следующих десятичных дробей:

a) 0,736; *b*) 0,00829; *c*) 0,003216; *d*) 4,217; *e*) 0,000 042 9, *f*) 0,2719; *g*) 0,000 000 009 81.

209. Найдите антилогарифмы, т.-е. числа соответствующие следующим логарифмам:

a) 9,8216 — 10; *b*) 6,2704 — 10; *c*) 7,0819 — 10; *d*) 4,3074—10; *e*) 8,3240 — 20; *f*) 0,2719.

210. Найдите $\sqrt[3]{86400}$.

211. Определите $4{,}375^4$.

212. Чему равняется $\sqrt{0{,}2796}$?

213. Извлеките кубический корень из 0,07284.

214. Формула объема шара такова:

$$V=\frac{\pi}{6}D^3,$$

где D — диаметр шара, а $\pi = 3{,}1416$. Пусть объем шара $V = 1520$ куб. см. Определите его диаметр.

215. Для расчета диаметра d мм. стального вала, который может передать N лошадиных сил, при числе оборотов в минуту $= n$, имеем следующую формулу:

$$d = 130\sqrt[3]{\frac{N}{n}}.$$

Вычислите N для $d = 64$ мм. и $n = 225$ обор. в минуту.

216. Определите из предыдущей формулы d, если известно, что $N = 28$ лош. сил и $n = 175$ обор. в минуту.

217. Толщина стенок цилиндрического сосуда без шва, который может выдерживать с безопасностью данное давление, определяется формулою Мариотта:

$$e = \frac{pD}{2z},$$

где e — толщина стенок в см.,

p — давление в метрических атмосферах (1 кгр на кв. см.),

D — диаметр цилиндра в см.,

z — допускаемое напряжение металла в кгр. на кв. см.

Для цилиндрического сосуда склепаного (со швом) допускаемое напряжение должно быть уменьшено в определенное число раз; с этой целью z умножают на k, где k — коэффициент, зависящий от рода заклепочного шва (k меньше 1). Вычислить, какое давление может выдержать котел при следующих данных:

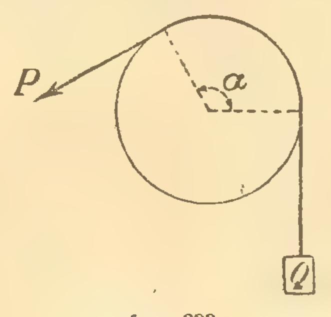
$D = 1{,}7$ метра;

$e = 12$ миллиметров;

k (для тройного шва в напуск) $= 0{,}75$,

$z = 7{,}4$ кгр. на кв. мм.

218. Трение позволяет малой силою удержать большой груз; для этого канат перекидывают через неподвижный деревянный цилиндр, обычно обернув вокруг него канат несколько раз (фиг. 233).



Фиг. 233.

Сила P, которую надо приложить к одному концу каната, чтобы удержать (но не поднять) груз Q, привешенный на другом конце, определяется следующей формулою Эйлера:

$$Q = P\, e^{\alpha}.$$

где e — постоянное число $= 2{,}718$; a — угол обхвата, выраженный в долях величины 2π, т.-е. $a = \frac{2\pi \cdot a^\circ}{360^\circ}$, если угол обхвата содержит a°; μ — коэффициент трения, зависящий от взятых материалов и состояния трущихся поверхностей. Для пеньковых канатов коэффициент μ имеет следующие значения:

По железному барабану.	По деревянному барабану.	По шероховатому дереву.
0,25	0 40	0,50

Вычислите, какую силу должен употребить человек, чтобы удержать груз в 1 тонну, обернув около цилиндрического бревна канат ровно $1^1/_2$ раза. Найдите при тех же условиях, какую силу надо приложить, чтобы *поднять* груз в 1 тонну.

219. Шаг t (в мм) зубчатого колеса (см. фиг. 198), которое должно передавать N лошадиных сил при n оборотах в минуту, зависит от допускаемого напряжения металла B (в кгр. на кв. мм.), от числа зубцов на колесе Z и выражается формулою:

$$t = 4{,}73 \sqrt[3]{\frac{716200\, N}{C.B.Z.\,n}},$$

где C — отвлеченное число, показывающ е, во сколько раз длина зубца больше шага. Вычислить шаг для следующих данных:

$N = 4{,}5\ HP$; $C = 3{,}8$; $B = 2{,}25$ кгр. на кв. мм.,

$Z = 72$, $n = 112$.

220. Определите p_2 в формуле:

$$p_2 = p_1 \cdot k^{1{,}41}$$

для $p_1 = 0{,}8$ атмосфер и $k = 4{,}5$ — степень сжатия.

ГЛАВА XXI.

Ответы и решения задач. Объяснения технических терминов.

К § 5. Диаметром болта (наружным) называется диаметр того стержня, на котором нарезана винтовая резьба. Внутренний диаметр—см. § 108. Наружный диаметр болта всегда выражается в английских (русских) дюймах. В машиностроении применяются следующие размеры болтов: $\frac{3''}{16}$; $\frac{1''}{4}$; $\frac{5''}{16}$; $\frac{3''}{8}$; $\frac{1''}{2}$; $\frac{5''}{8}$; $\frac{3''}{4}$; $\frac{7''}{8}$; $1''$; $1\frac{1''}{8}$; $1\frac{1''}{4}$ и т. д. В России принята английская система болтов Витворта. Число нарезок (ниток, витков) на длине одного дюйма болта зависит от диаметра болта, именно:

$$\frac{3''}{16} - 24;\quad \frac{3''}{8} - 14;\quad \frac{3''}{4} - 10;$$

$$\frac{1''}{4} - 20;\quad \frac{1''}{2} - 12;\quad \frac{7''}{8} - 9;$$

$$\frac{5}{16} - 18;\quad \frac{5''}{8} - 11;\quad 1'' - 8.$$

Гайка (и головка болта), по системе проф. Баха, представляет правильный шестиугольник, вписанный в окружность радиуса D, где D — наружный диаметр болта. На фиг. 108 показан способ построения гаечного ключа. Там же видно, что называется отверстием ключа. Квадратные гайки (применяющиеся, главным образом, в сельско-хозяйственных машинах) имеют сторону рав-

ную W для того, чтобы один и тот же ключ можно было применять к шестиугольным и квадратным гайкам.

2. $D = \frac{5}{16}$ дм. $= 8$ мм., $W = 1{,}5 \times 8 + 3 = 12 + 3 = 15$ мм.

$D = \frac{1}{2}$ дм. $= 13$ мм $W = 1{,}5 \times 13 + 3 = 22{,}5$ мм.

$D = \frac{3}{4}$ дм. $= 19$ мм $W = 31{,}5$ мм.

$D = 1\frac{1}{8}$ дм. $= 29$ мм. $W = 46{,}5$ мм.

$D = 1\frac{1}{2}$ дм. $= 38$ мм.; $W = 60$ мм.

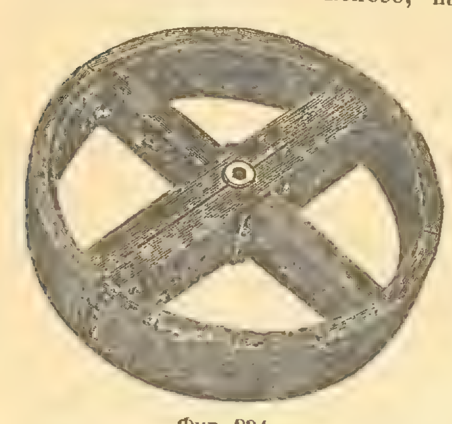
Перевод дюймов в миллиметры и обратно миллиметров в дюймы производится при помощи таблицы (2), приложенной к книге.

3. (b) $A = \frac{1}{2} ba = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \times 10 \times 2} = \frac{1}{40}$ кв. м.

4. $L = 1{,}65(D + d) + 2C = 1{,}65\ (0{,}9 + 0{,}6) + 2 \times 5 =$
$= 1{,}65 \times 1{,}5 + 10 = 2{,}48 + 10 = 12{,}48$ метра.

Шкивом называется колесо, насаживаемое на вал и служащее для передачи вращения при помощи приводного ремня (фиг. 234). Размеры шкива указываются следующим образом:

$$18'' \times 4'' \times 2\frac{1''}{2}.$$



Фиг. 234.

Это значит, что диаметр шкива равен 18″, ширина обода 4″ и диаметр отверстия во втулке $2\frac{1''}{2}$. Шкивы делаются чугунные или деревянные (редко железные). Ремни делают кожаные, из верблюжей шерсти, хлопчато-бумажные и прорезиненные. Ширина ремня бывает от 1″ до 30″. Если два шкива соединены между

собою ремнем, то числа оборотов их обратно пропорциональны их диаметрам.

5. Дано: $D = 25$ см. $= 250$ мм.; $T = 13$ мм. Длина прута $L = \pi\ (D + T) = 3{,}1416\ \ (250 + 13)$ мм. $= 3{,}1416 \times 263 = 826{,}2408$ мм. или, отбрасывая доли миллиметра, найдем $L = 826$ мм.

6. Формула для объема прямоугольного листа, имеет вид: $V = lbt$ куб. сантиметров, если длина l, ширина b и толщина t выражены в сантиметрах.

Прямоугольный лист имеет форму которая со всех сторон ограничивается прямоугольниками; такова форма кирпича, такова же обычная форма комнат. Такая форма называется призмою. Ее объем находится умножением площади основания на высоту (толщину), а сама площадь основания прямоугольника равна произведению длины на ширину.

7. Удельным весом называется вес одного куб. см. данного вещества Если удельный вес равен p граммов, а объем равен V куб. сантиметров то вес всего куска данного вещества равен pV граммов; поэтому формула для веса листа будет такова:

$$\text{вес} = p.\, l.\, b.\, t.\ \text{граммов.}$$

8. Круглый лист диаметром D см. и толщиною t см. имеет форму цилиндра, у которого основанием является кружок диаметром D см.; толщина листа будет высотою цилиндра. Объем цилиндра равен произведению площади основания (круга) на высоту; поэтому объем круглого листа выражается формулою:

$$V = \frac{D^2 t}{4} = 0{,}7854.\ D^2 . t\ \text{куб. см.}$$

Если 1 куб. см. данного металла весит p граммов, то вес всего листа, имеющего объем V куб. см., определяется формулою:

$$\text{вес листа} = 0{,}7854.\, D^2 .\, t.\, p\ \text{граммов.}$$

$$\text{или вес} = 0{,}7854 \times 160^2 \times 1 \times 8\tfrac{1}{2} =$$

$$= \frac{0{,}7854.\ 25600.\ 17}{2} = 170903\ \text{граммов или}\ 171\ \text{килограмм.}$$

9. $d_2 = d_1 - 0{,}001 d_1 - 0{,}08 = 50 - 0{,}001 \times 50 - 0{,}08 =$
$= 50 - 0{,}05 - 0{,}08 = 50 - 0{,}13 = 49{,}87$ мм.

10. Объем куба с ребром a мм. равен a^3 куб. мм.; просверленное в кубе отверстие удалило из куба кусок, имеющий фор-

му цилиндра, у которого в основании круг диаметром в d мм. и высота a мм.; объем такого цилиндра (см. задачу № 8) равен:

$$\frac{\pi d^2 a}{4} = 0{,}7854 . d^2 a \text{ кб. мм.};$$

объем данного тела (куб с отверстием) равняется разности объемов куба и цилиндра, т.-е.

$$V = a^3 - 0{,}7854 d^2 . a \text{ кб. мм.};$$

вес тела найдем, умножая удельный вес на число куб. сантиметров в объеме тела; поэтому искомый вес равен:

$$\frac{p.(a^3 - 0{,}7854 d^2 . a)}{1000} \text{ граммов.}$$

Дано: $a = 60$ мм.; $d = 50$ мм.; $p = 8{,}5$ гр.;

$$\text{вес тела} = \frac{8{,}5\ (60^3 - 0{,}7854 .\ 50^2 .\ 60)}{1000} =$$

$$= \frac{8{,}5\ (216000 - 117810)}{1000} = 834{,}6 \text{ грамма.}$$

11. Объем данной плиты равен объему призмы, у которой длина L мм., ширина B мм. и высота (толщина) T мм., за вычетом пяти объемов цилиндра, у которого диаметр основания d мм. и высота T мм.; поэтому объем плиты выразится формулою:

$$V = LBT - 5 \times 0{,}7854 d^2\ T \text{ кб. мм.},$$

или

$$V = \frac{LBT - 5 . 0{,}7854 d^2\, T}{1000} \text{ кб. см.};$$

отсюда вес плиты равен:

$$\frac{p\ (LBT - 5 . 0{,}7854 d^2\ T)}{1000} \text{ граммов.}$$

Подставляем данные числа:

$$\text{вес плиты} = \frac{8{,}5\ (100 \times 50 \times 6 - 5 \times 0{,}7854 \times 6^2 \times 6)}{1000} =$$

$$= \frac{8{,}5\ (30000 - 848)}{1000} = 247{,}8 \text{ грамма.}$$

12. На основании указаний к задаче № 11 объем плиты выражается формулою:

$$V = LBT - 0{,}7854.\ K\ d^2\ T \text{ кб. мм.},$$

или $$V = (LBT - 0{,}7854.\ K\ d^2\ T)\ 0{,}001 \text{ кб. см.};$$

вес плиты поэтому равен:

$$Q = p\ (LBT - 0{,}7854.\ K\ d^2\ T)\ 0{,}001 \text{ грамма.}$$

15. $27° - 15° = +12°$.

16. $12° - 17° = -\ 5°$.

20. $6X - 3X - 5X = -2X$.

23. $(2D^2 - D - 6) + (-D^2 + 3D + 4) = D^2 + 2D - 2$.

24. $800 + 200 = 1000$.
$64 + 75 + 68 + 132 + 130 + 72 + 128 = 669$;
$1000 - 669 = 331$.

25. $V = 0{,}0000071h(2D + d)^2 = 0{,}0000071 \times 70\,(2 \times 50 + 40)^2 =$
$= 9{,}74$ ведра, т.-е. около 10 ведер.

В § 93 приведена еще другая формула для объема бочки.

26. Число годных поковок первого сорта равняется: $80 + 50 - 8 = 122$, их вес равен $122a$ кило; соответственно для второго сорта находим вес годных поковок: $(64 + 75 - 12)\,b = 127b$ кило; искомый общий вес будет

$$122a + 127b \text{ килограммов.}$$

Поковка — всякий откованный предмет. Иначе называется кузнечная заготовка.

28. $14° - (-15°) = 14° + 15° = 29°$.
$30m - (-20m) = 30m + 20m = 50m$.
$12 - (-6) = 18$.
$12A - (-18A) = 30A$.

30. $(10a + 6b) - (6a + 4b) = 10a + 6b - 6a - 4b = 4a + 2b$.
$(3m - 7n) - (-2m - 3n) = 3m - 7n + 2m + 3n =$
$= 5m - 4n$.

31. $(a^2 - 2a + 1) - (3a - 2) = a^2 - 2a + 1 - 3a + 2 =$
$= a^2 - 5a + 3$.
$(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - b^2) = 2ab + 2b^2$.

33. 1) $5\frac{1}{7}D$. 2) $4x - 9$.

34. $A = 163{,}6$ кв. метра.

35. $A = \frac{1}{4} \times 654,52 = 163,6$ кв. метра.

36. Чтобы понять приведенную формулу, обратите внимание на то, что a^2 представляет площадь верхнего основания; b^2 — площадь нижнего основания;

тогда $$(a+b)\sqrt{(b-a)^2+4h^2}$$

должно выражать собою сумму площадей четырех боковых граней, которые являются трапециями.

Как найти площадь каждой боковой грани, указано в § 6. Каким образом высота боковой грани выражается через стороны a и b и через высоту пирамиды h, можно понять на основании последнего примера в § 20.

Ответ $A = 98700$ кв. мм.

37. $V = 2058333$ кб. мм. Формула объема усечённой пирамиды выведена в § 92.

38. $N = \frac{V}{C} = \frac{18000}{3,1416.90} = 64$ оборота в мин.

39. Дано: $2b = 10$ см.; $A = 200$ кв. см.
Из формулы $A = 3,1416ab$ находим:

$$a = \frac{A}{3,1416\,b} \text{ или } 2a = \frac{2A}{3,1416\,b}; 2a = \frac{2 \times 200}{3,1416 \times 5} = 25,5 \text{ см.}$$

40. $H = \frac{A}{2\,(L+B)} = 3,2$ метра.

41. $b = \frac{2A}{h} - b' = 3,5$ метр.

42. $W = \frac{75N}{PV} = \frac{75 \times 50}{1,5 \times 20} = 125$ мм.

„Лошадиная сила“ есть техническая единица для измерения мощности двигателя. Двигатель в 1 лош. силу может поднять в 1 секунду груз в 75 килограммов на высоту одного метра или, как говорят, производит в секунду работу, равную 75 килограммометрам.

Обозначение „лошадиной силы“:

русское: л. с.
немецкое: P. S.
английское: H. P.

Надо заметить, что название „лошадиная сила“—совершенно неправильно, так как в лошадиных силах измеряется не сила, а мощность (работоспособность); сила измеряется в килограммах

43. $W = 1\frac{13}{16}$ дм. $= 46$ мм.

$$D = \frac{2}{3}(W - 3) = 28.7 \text{ мм.} = 1\frac{1}{8} \text{ дм.}$$

44. $D = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$.

45. $Q = \frac{1}{6} p\pi D^3 = 1{,}2\,\pi D^3$.

46. Вес шара $Q = 7{,}2$ кгр. $= 7200$ гр.

$$D = \sqrt[3]{\frac{Q}{1{,}2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{7200}{1{,}2\pi}} = \sqrt{6000 \cdot 0{,}3183} = \sqrt[3]{1910}.$$

По таблице кубов чисел в конце книги находим, что D приблизительно равно 12,4 см. Из таблицы имеем: $\sqrt[3]{1728} = 12$; $\sqrt[3]{2197} = 13$; изменению чисел на 469 соответствует в корне разница на 1, отсюда изменению чисел на 182 соответствует в корне разница на $\frac{182}{469} = 0{,}38$ или $0{,}4$.

47. Площадь сечения круглой трубы равняется: $A = \frac{\pi}{4} d^2$. Эта площадь по условию задачи равна площади сечения эллиптической трубы, т.-е. $\frac{\pi}{4} d^2 = \pi ab$; отсюда $d^2 = 4\,ab$ или $d^2 = 2a \times 2b$. Квадрат диаметра круга равен произведению осей эллипса, или квадрат радиуса равен произведению полуосей.

48. $D = d\sqrt{\frac{N - 3{,}7}{0{,}907}} + 0{,}94d$.

49. Измерение дает: $D = 63$ мм., $d = 12{,}5$ мм.; отсюда $N = 18{,}9$ или 19.

50. $W = \frac{760\,Fd^4}{N(D - d)^3}$.

51. $F = \frac{NWr^3}{95d^4}$.

53. 1) $4ab + 6b^2$; 2) $-10mp + 6np$.

60. $-3 + 4y - z$.

61. $a - 4$.

62. $x^2 - 4x + 4$.

63. $\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$.

64. $0{,}315\,a^2\,(a + b)$.

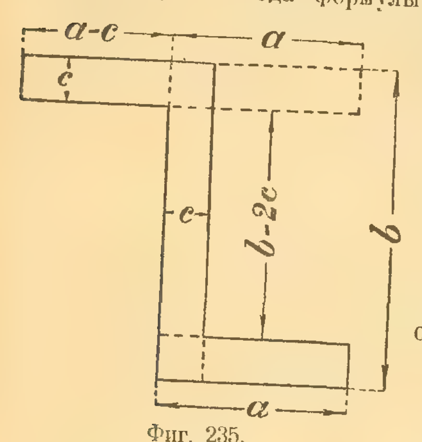
65. $\pi r^2\,(a + b)$.

66. $\frac{\pi}{4}l\,(D^2 - d^2)$.

67. $V = (a + b)(a - b)(a - 2b) = a^3 - 2a^2b - ab^2 + 2b^3$.

68. Вес $Q = 8 \times 8a^3$ граммов; дано, что $Q = 1$ тонне $= 1000$ кгр. $= 1000000$ гр.; отсюда: $a = \sqrt[3]{\frac{1000000}{8 \times 8}} = \frac{100}{2 \times 2} = 25$ см. Болванкой наз. призматический кусок стали, железа или чугуна, полученный отливкой или ковкой.

69. а) Для вывода формулы площади сечения, эту площадь надо разбить на ряд прямоугольников любым способом, напр. (фиг. 235):



Фиг. 235.

1) $(a - c)c + bc + (a - c)c$.

2) $ac + (b - 2c)c + ac$.

3) $2ac + bc - 2c^2$.

Результат должен получиться один и тот же: площадь

$$A = c\,(2a + b - 2c).$$

В технике применяют еще такой способ: один из выступов на сечении, напр., верхний — переносят с одной стороны на другую и дополняют всю фигуру до прямоугольника: тогда искомая площадь выразится разностью площадей двух прямоугольников:

$$A = ab - (a - c)(b - 2c) = c\,(2a + b - 2c).$$

б) Объем погонного метра, если размеры a, b и c выражены в сантиметрах, равен:

$$V = 100\ c\ (2a + b - 2c) \text{ куб. см.}$$

в) Вес погонного метра:

$$Q = 780\ c(2a + b - 2c) = 87984 \text{ гр.} = 88 \text{ кило.}$$

70. $S = ab + bc + ca$.

71. (a) $x = 6$; (b) $x = -2$; (c) $x = 3$; (d) $x = 2$;

72. (a) $D = 12$; (b) $D = 7,8$; (c) $a = 12$; (d) $c = 13,9$.

73. $2x + 15 = x + 19$; $x = 4$.

74. У первого 37 руб., у второго 27 руб., у третьего 26 руб. Полезно после решения уравнения убедиться, что полученные числовые данные соответствуют условиям задачи. В данном случае поверка такова:

$$37 + 27 + 26 = 90.$$

75. Бо̀льшее число 60

76. В задаче № 38 дана формула: $V = CN$, отсюда скорость $V = \pi DN$, если D — диаметр предмета. Ответ: $D = 58$ мм.

77. 80,54 тонны.

78. 24.

79. Два числа относятся друг к другу, как 5 к 7; это значит, что одно число составляет $^5/_7$ другого. Искомые числа: 14 и 10.

80. Число килограммов добавляемого цинка обозначим через x; тогда весь сплав будет весить $600 + x$. Количество цинка в нем составляет 34 процента, т.-е. в килограммах: $\frac{(600 + x)\,34}{100}$; с другой стороны, в 600 кило латуни 30 процентов цинка, т.-е. 180 кило; с добавкой x это составит $180 + x$; следовательно, получаем уравнение: $\frac{(600 + x)\,34}{100} = 180 + x$. Отсюда $x = 36,4$ кгр.

Латунью (или желтой медью) называется сплав меди с цинком. Бронза представляет сплав меди с оловом (иногда с добавкой фосфора, алюминия, кремния или марганца, смотря по назначению).

81. $x = 3$; $y = 1$

Поверяем решение подстановкой найденных значений в уравнения:

$$3+1=4; \quad 3-2\times 1=1$$

82. $x=4$; $y=1$.

83. $x=3$; $y=2$. Для простоты действия можно воспользоваться вспомогательным уравнением: $x-y=1$, которое получается при вычитании данных уравнений друг из друга.

84. $x=3$; $y=2$; $z=1$. Начать решение данных уравнений всего удобнее сложением второго и третьего.

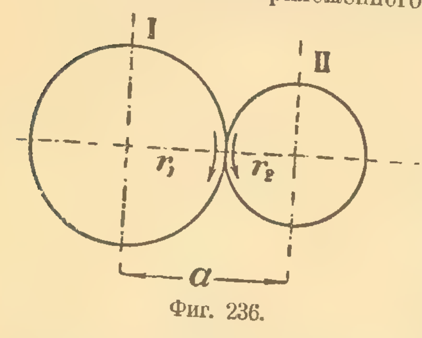
85. $a=4{,}5$ м.; $b=1{,}5$ метра. Шарниром называется подвижное соединение двух стержней или вообще двух частей, напр., перочинные ножи, ножницы и проч.

86. Два уравнения: $x+y=100$,

$$\frac{2x}{100}+\frac{5{,}2y}{100}=\frac{3{,}28\cdot 100}{100},$$

$$x=60; \quad y=40.$$

87. Как видно из приложенного чертежа (фиг. 236): $d_1+d_2=2a$. С другой стороны, отношение чисел оборотов должно равняться: 1,8 : 1; но у двух сцепленных шестерен число оборотов большей во столько раз меньше числа оборотов меньшей, во сколько раз длина окружности первой больше длины окружности второй; отношение длин окружностей заменяем отношением диаметров; отсюда имеем второе уравнение: $\frac{d_1}{d_2}=\frac{1}{1{,}8}$; решая их, найдем: $d_1=130$ мм., $d_2=234$ мм.



Фиг. 236.

88. 5 и 15.

89. Если меньший катет обозначим через x, то придется решать уравнение: $x^2+7x-60=0$; откуда $x_1=5$; $x_2=-12$. Отрицательное решение отбрасывается, как не соответствующее условиям задачи; два искомых катета будут: 5 и 12.

90. $AB=15$ см.; $BC=20$ см.

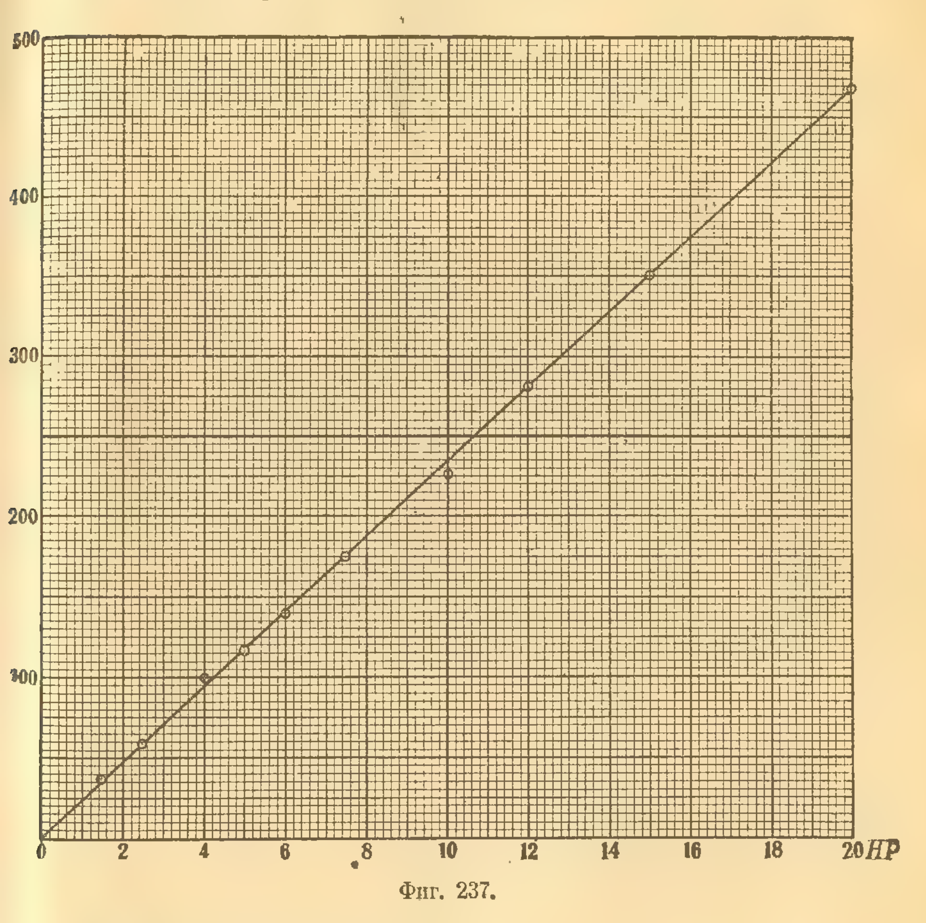
91. 23; 56; 35 и 25,5 киловатт.

92. 5 ч. 21 м. и 9 ч 30 м.

93. 15,2 см.; 15,24 см.

94. Формула дает $F = 16{,}84$ мм. Диаграмма — 16,5 мм.

95. Решение представлено на фигуре 237.



Фиг. 237.

96. Для 6 л. с. — 140 дол.
„ 12 л. с. — 280 „
„ 20 л. с. — 467 „

97. Кривую на диаграмме строим по точкам, координаты которых находим, давая высоте H ряд произвольных значений и отыскивая соответствующие значения для давления P. Получим прямую линию.

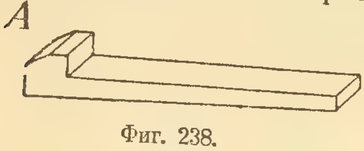
98. Формула $N = \frac{1000\,V}{\pi \cdot D}$

Диам. предм. в мм.	Число оборотов в минуту для различ. скоростей резания.				
	6 метр. в мин.	12 метр. в мин.	18 метр. в мин.	24 метр. в мин.	30 метр. в мин.
25	76	153	229	306	382
50	38	76	115	153	191
75	25	51	76	102	127
и т. д.					

Упражнение на стр. 95: $S = 76{,}3\,c + 30{,}1$.

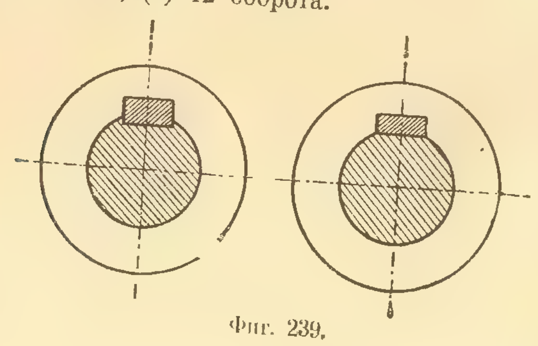
99. В уравнении линии: $y = {}^1/_2\,x - {}^1/_4$ полагаем $y = 0$; отсюда $x = {}^1/_2$ — это есть абсцисса точки пересечения линии с осью Ox.

100. Ширина = 24 мм.; толщина = 16 мм. Шпонкой называется стальной стержень прямоугольного сечения, применяемый для закрепления на валу шкивов, зубчатых колес, маховиков и проч. Форму шпонки можно видеть на фиг. 238, а применение ее на фиг. 239. Утолщенная часть A называется головкой шпонки и служит для выколачивания шпонки.



Фиг. 238.

101. (*а*) 40 мм.; (*б*) 42 оборота.

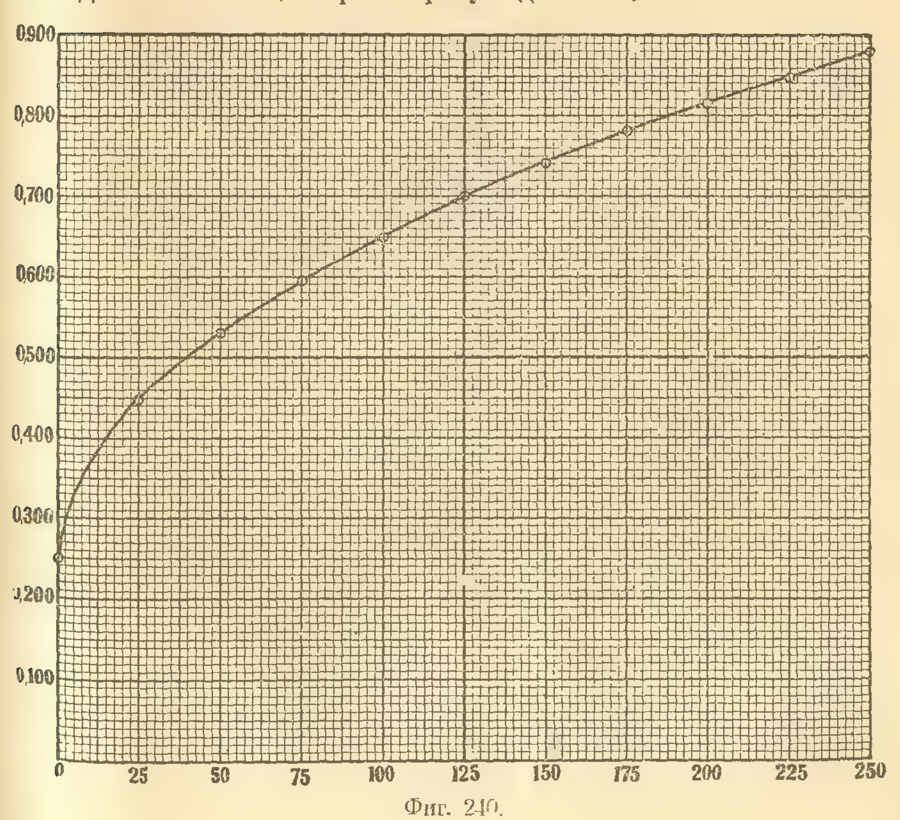


Фиг. 239.

102. На основании приведенной формулы составляем таблицу:

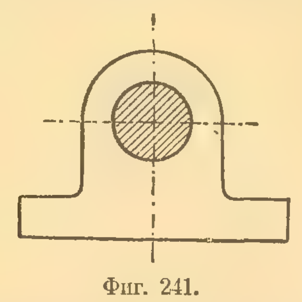
d.	*a.*
0	0,025
25	0,045
50	0,053
75	0,060
100	0,065
125	0,070
150	0,074
175	0,078
200	0,081
225	0,085
250	0,088

Для этой таблицы строим кривую (фиг. 240).



Фиг. 240.

Вал всегда служит для передачи вращения. Поэтому он должен лежать своими концами в каких-нибудь опорах, допускающих свободное вращение вала. Эти опоры называются подшипниками. На фиг. 241 схематично изображен такой подшипник. Очевидно, что отверстие в подшипнике должно иметь диаметр бо́льший, чем вращающийся в нем конец вала. Разность диаметров обозначена в задаче № 102 буквой a.



Фиг. 241.

103. Для двух формул $HP = \frac{D^2}{4}$ и $HP = \frac{3D^2}{8}$ составляем таблицу:

Диаметр в см.	Число лошадин. сил.	
	2 цилинд.	6 цилинд.
8	16	24
9	20	и т. д.
10	25	—
и т. д.	и т. д.	—
15	56	84

Найденные числа изображаем графически, как в задаче № 102. Полученная кривая — парабола, так как число лошадиных сил пропорционально квадрату диаметра.

104. Как показывает пример в § 42, можно провести искомую прямую несколькими способами. Уравнение одной из таких прямых может иметь такой вид:

$$y = 20,4\ x + 47,6.$$

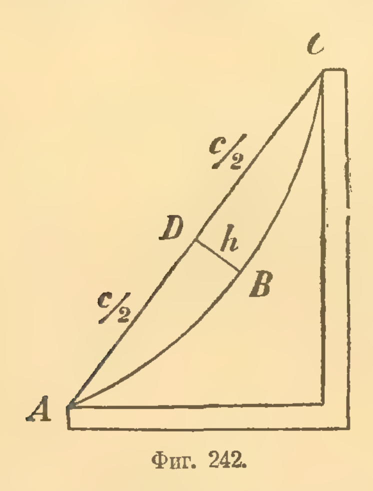
105. 60°.

106. 2,1 см.; 7°,5.

107. 146,9 см.

108. $AC = 89$ мм.; $BC = 113{,}1$ мм.

111. Строим для данной дуги хорду AC и стрелу дуги BD (фиг. 242), т. е. делим хорду пополам и из середины D вос-



Фиг. 242.

ставляем перпендикуляр BD до пересечения с дугой в точке B; BD и есть стрела дуги. Измеряем длину хорды AC и длину стрелы BD; пусть нашли: $AC = c$ мм. и $BD = h$ мм. Искомый радиус вычисляется по формуле (см. § 58):

$$r = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2}{2h}.$$

112. См. § 50.

114. 28,3 мм.

115. Из прямоугольного треугольника, представляющего половину сечения балки, имеем (фиг. 84):

$$h^2 + b^2 = d^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Этот треугольник перпендикуляром x делится в свою очередь на два других прямоугольных треугольника, в которых имеем:

в одном: $$x^2 = h^2 - \left(\frac{2}{3}d\right)^2;$$

в другом:
$$x^2 = b^2 - \left(\frac{1}{3}d\right)^2;$$

сравнивая эти два равенства, получим второе уравнение:

$$h^2 - b^2 = \frac{1}{3}d^2; \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

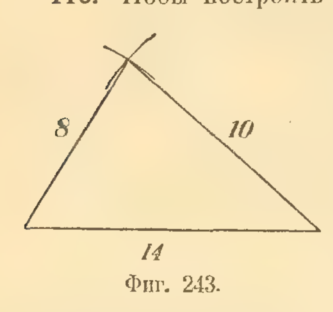
из уравнений (1) и (2), считая d известной величиной,

найдем: $h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}d$; $b = \frac{1}{\sqrt{3}}d$;

откуда:
$$\frac{h}{b} = \sqrt{2} = 1,41$$

или приблизительно $\frac{7}{5}$.

116. Чтобы построить треугольник по трем данным сторонам его, откладываем отрезок, равный одной его стороне, и из крайних точек этого отрезка, как из центра, описываем циркулем две дуги, радиусы которых равны длинам двух других сторон треугольника (фиг. 243). Точку пересечения дуг соединяем с крайними точками первой стороны. Получаем треугольник, стороны которого имеют требуемую длину.

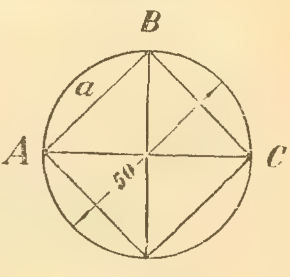


Фиг. 243.

118. $BD = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = 3,87$ метра.

Фермой называется сооружение, сделанное из железных стержней (стержни не круглые, а из так назыв. фасонного железа, напр., углового, см. задачу № 70). Вся ферма, как видно из фиг. 109, представляет ряд треугольников. Фермы применяются для покрытия зданий (стропильные фермы) или служат основанием мостов (мостовые фермы). Фермы предназначаются для принятия на себя известной нагрузки (стропила выдерживают вес кровли и снега и давление ветра; мостовые — вес моста и поезда).

119. Из прямоугольного треугольника ABC (фиг. 244) имеем: $a^2=\frac{50^2}{2}$, откуда $a=\frac{50}{\sqrt{2}}$; для простоты вычислений делаем следующие преобразования: $a=\frac{100\sqrt{2}}{4}=\frac{141,4}{4}=$ $=35,4$ мм. Объясните, как произведено преобразование.



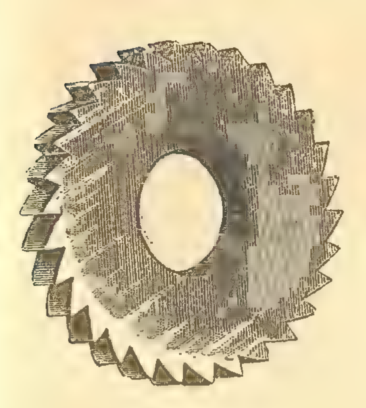
Фиг. 244.

Фрезеровка производится на особых станках при помощи стального инструмента, называемого фрезером и похожего на зубчатое колесо с острыми зубьями (фиг. 245). Зубья вращающегося фрезера снимают с обрабатываемой поверхности мелкие стружки и дают ей требуемый вид. Например, канавки для шпонки (см. фиг. 239) выделываются лучше всего при помощи фрезера. Зубцы зубчатых колес нарезают тоже фрезером.

120. Эта задача — обратная к задаче № 119; поэтому находим: $D=a\sqrt{2}=32\sqrt{2}=45,2$ мм.

121. См. § 67.

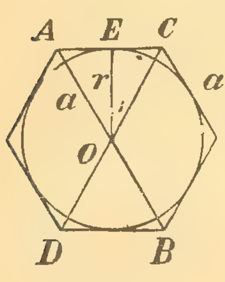
122. Чтобы найти радиус круга, вписанного в правильный





Фиг. 245.

шестиугольник, проводим два диаметра AB и CD (фиг. 246); точка их пересечения O будет центром вписанного круга. Затем делим сторону AC пополам; найденная середина стороны E будет служить точкою касания вписанной окружности к стороне шестиугольника; поэтому отрезок OE даст нам искомый радиус вписанного круга.



Фиг. 246.

Из равностороннего треугольника ACO, в котором $AC = a$; $CO = AO = a$ (см. § 68) и высота $OE = r$, находим (см. § 62):

$$= \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0,866a;$$

отсюда: $d = a\sqrt{3} = 1,732\,a = 5,20$ см.

123. Определим сначала диагональ AC (фиг. 104), затем, взяв ее половину, найдем радиус засечения $CO = CI$. Вычтя из длины стороны CB этот размер, мы получим IB; зная эту величину, не трудно вычислить HI или IJ, которые равны между собою.

Проделав указанные действия, получим: $AC = a\sqrt{2}$; $CO = CI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $BI = CB - CI = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$; $HI = BI\sqrt{2} = a(\sqrt{2}-1) = 0,414\,a$ или в данных числах: $HI = 3,3$ см. Произведите искомое построение и проверьте его измерением найденной стороны восьмиугольника.

124. См. построение овала в § 71

125. См. §§ 67, 68 и 70.

126. Из прямоугольного треугольника (см. фиг. 110), в котором гипотенуза равна D, один катет равен $\frac{W}{2}$, другой $= \frac{D}{2}$, имеем:

$$W = D\cdot\sqrt{3} = 1,732\,D.$$

Сравнивая две указанные в задаче формулы, находим:

$$1,732\,D = 1,5\,D + 3.$$

Отсюда получаем значение D, дающее при подстановке в ту и другую формулу одно и то же значение W:

$$D = \frac{3}{0,232} = 12,9 \text{ мм.} = {}^1/_2{}''.$$

127. По формуле § 74: $A = 0,433 \times 9^2 = 35,07$ кв см.

128. $a^2 = 0,7854\,D^2$; $a = 17,7$ мм.

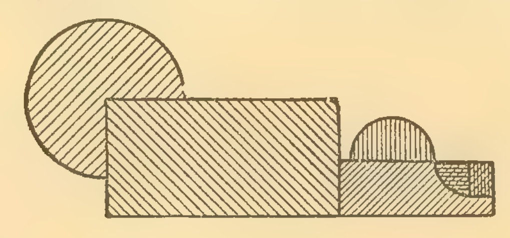
129. $R = \sqrt{ab}$; $2a = 26,7$ см.

130. По формуле § 115: $A = 206,09$ кв. м.

131. Фигура состоит из квадрата и четырех трапеций.

$$A = 1240 \text{ кв. см.}$$

132. На фиг. 247 различной штриховкой указан способ расчленения измеряемой площади на отдельные части, площади ко-



Фиг. 247.

торых легко вычисляются по данным размерам. Площади, имеющие двойную штриховку, вычитаются.

Ответ: 1400 кв. мм.

133. По § 78: $A = 0,866 \cdot 20^2 = 346,40$ кв. мм.

134. 21,5%.

135. Измерение отрезков произведите помощью циркуля и поперечного масштаба (§ 47), который начертите себе возможно тщательнее и точнее. $A = 53$ кв. мм.

136. 2,57 кб. метра.

137. Задача сводится к построению треугольника по трем сторонам, равным 10, 11 и 12 см.

138. Начертив произвольную трапецию, построить ей подобную, сохранив величины углов и уменьшив все стороны в 4 раза.

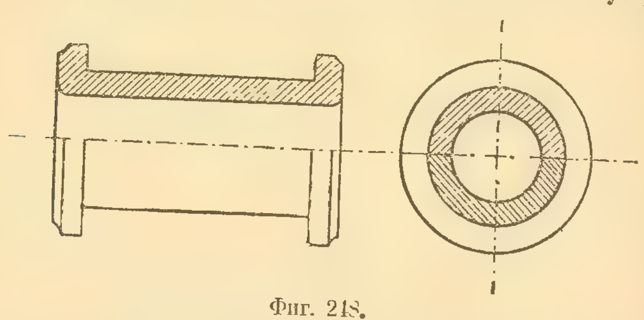
139. а) Около $^1/_5$; б) $^1/_{206}$; в) $^2/_5$.

140. Задача заключается в построении контура, подобного фиг. 132, в $^3/_2$ натуральной величины, т.-е. тех размеров, которые проставлены на чертеже; так напр., нижнее основание должно равняться $^3/_2 \times 60 = 90$ мм.

141. 17,858 килограмма. В этой и след. задачах величины площадей круга берите из таблицы в конце книги.

142. 634,5 грамма (§ 92, 77 и 88).

На фигуре 241 схематически изображен подшипник. Так как при вращении вала, отверстие подшипника разрабатывается (изнашивается), то во избежание этого между валом и подшипником помещают так наз. „вкладыш“, представляющий из себя нечто вроде короткой трубки (фиг. 248). При таком устройстве



Фиг. 248.

изнашивается уже не самый подшипник, а этот вкладыш, который легко может быть заменен новым. Вкладыши делают обыкновенно из фосфористой бронзы (см. объяснение к задаче № 80)

143. Фигура, представляемая головкою ключа (см. фиг. 108) состоит из $^2/_3$ площади круга с диаметром $2D$ и из $^1/_3$ площади круга с диаметром $4D$ за вычетом $^1/_3$ площади правильного шестиугольника со стороною D. Примем $D = {}^3/_4{}'' = 19$ мм. Площадь фигуры равна 1955,6 кв. мм. = 19,56 кв. см. Вес головки = $= 19{,}56 \times 1{,}5 \times 7{,}8 = 228{,}9$ грамма.

144. 11310 кв. см. (§ 94).

145. 29 мм. (см. § 89).

146. По формуле § 92 — 7,95 кб. метра.

147. Из равенства: $\frac{\pi}{4}(0{,}25)^2 \times x \times 7{,}8 = 19500$; надо помнить, что в формулах, где входит удельный вес, надо длины выражать в см., вес в грам.; $x = 510$ метров.

148. См. § 94. $D = 20$ см.

149. Объем обода можно найти двояким образом (фиг. 249):

1) объем обода равен разности объемов двух цилиндров с высотою 8 см. и с диаметром 150 см. и 110 см.

2) По § 96 объем равен площади сечения 20×8 кв. см., умноженной на длину окружности, описанной центром сечения, т.-е. имеющий диаметр 130 см. Вес обода = 470,5 кгр.

150. Объем крюка равен объему цилиндра с диаметром в 12 см. и высотою в 1 см. $= 113{,}1$ кб. см.

151. (§ 88) 4241 кв. см.

152. $\operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^\circ = 0{,}4142$; $\operatorname{tg} 67^\circ 20' = 2{,}3945$.

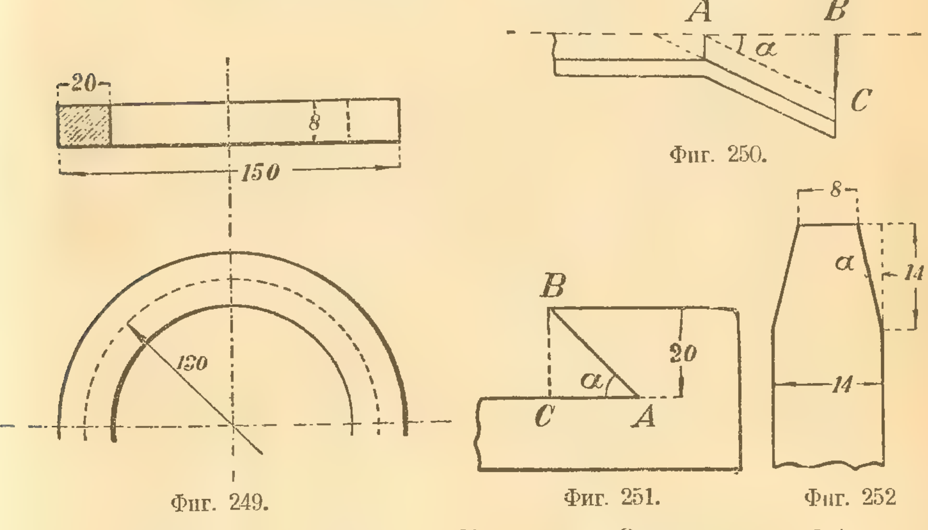
153. $\operatorname{cotg} 67^\circ 30' = 0{,}4142 = \operatorname{tg} 22^\circ 30'$; $\operatorname{cotg} 34^\circ 40' = 1{,}4460$.

154. $53^\circ 30'$.

155. $2^\circ 52'$.

156. $a = 48 \operatorname{tg} 22^\circ{,}5 = 19{,}9$ мм.

157. Угол α определяется из треугольника ABC (фиг. 250),



Фиг. 250.

Фиг. 249.

Фиг. 251.

Фиг. 252

где $AB = 31$ мм., $BC = {}^{28}/_2 - {}^{6}/_2 = 11$ мм. Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = {}^{11}/_{31}$; $\alpha = 19^\circ 32'$.

158. Искомый угол получится построением прямоугольного треугольника, в котором отношение катетов равно $\operatorname{tg} 14^\circ 30'$, т.-е., напр., катеты имеют длину 25,9 мм. и 100 мм.

159. В треугольнике ABC (фиг. 251) $BC = 20$ мм.,

$$AC = \frac{140 - 100}{2} = 20 \text{ мм.}$$ Угол $\alpha = 45^\circ$.

Пазом называется выемка, сделанная на поверхности какого-нибудь предмета и служащая для закрепления в ней или для передвижения по ней другого предмета. Изображенный на фиг. 175 паз служит дорожкой (или, как говорят, направляющей), по которой будет двигаться какая-либо часть (деталь) машины.

160. $\operatorname{tg} \alpha = {}^{3}/_{14}$; $\alpha = 12^\circ 6'$ (фиг. 252).

Цепную передачу можно видеть в велосипеде. Отличие ее от ременной состоит в том, что вместо ремня берется цепь, а вместо гладкого шкива так наз. цепная шестерня, между зубьями которой располагаются звенья цепи. Другой пример цепной передачи — стенные часы с гирями.

161. (Фиг. 253) Угол $\alpha = 32°$. $D = 200 \operatorname{tg} 32° = 125$ мм.

162. 53,5 метра.

163. 1700 метров.

164. 162 метра.

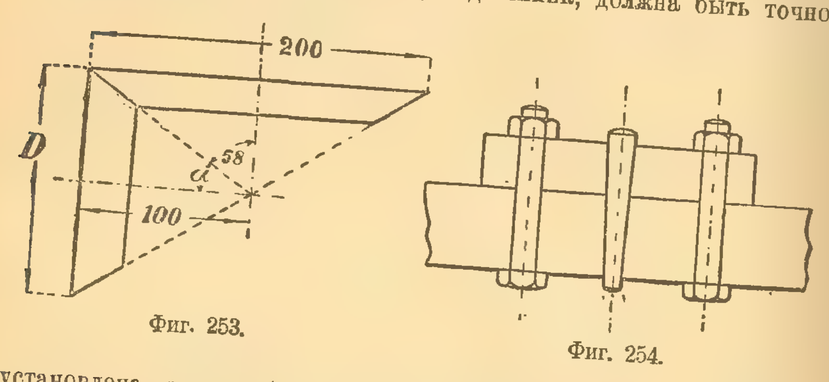
165. $D_1 = D - \frac{1,3}{N}$ (см. § 109) $= 0,62'' = {}^5/_8''$.

166. Ширина площадки (§ 109) $= \frac{1}{8} p = \frac{1}{8N} = \frac{1''}{32}$.

167. Arc tg $0,25 = 14° 2'$; 3 arc tg $0,25 = 42° 6'$.

168. Конусность (§ 110) $= \frac{R - r}{L} = {}^1/_{100}$.

Иногда часть машины, напр., подшипник, должна быть точно

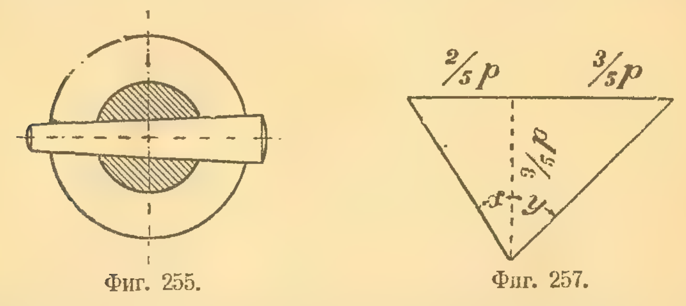


Фиг. 253.

Фиг. 254.

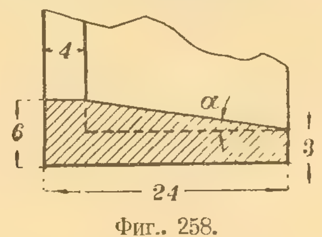
установлена, таким образом, чтобы она не могла быть сдвинута и могла быть быстро поставлена на место в случае разборки и сборки машины. Проще всего такая установка достигается при помощи стального конусного штифта (так наз. контрольной шпильки). См. фиг. 254. Примеры контрольных шпилек можно видеть в карманных и стенных часах. Очень часто конусная шпилька применяется для закрепления на валу рукояток, не больших зубчатых колес (шестерен) и проч., как показывает фиг. 255.

Конусная развертка представляет из себя усеченный конус с очень малым углом при вершине (фиг. 256). На боковой по-



Фиг. 255. Фиг. 257.

верхности конуса прорезаны канавки, которые образуют, таким образом, режущие кромки. Просверлив сверлом цилиндрическое отверстие и обработав („прогнав") его конусной разверткой, по-



Фиг.. 258.

лучим конусное отверстие. Пример — самоварный кран. Таким же образом делаются и конусные отверстия для контрольных шпилек.

169. $L = 75$ мм. Угол $= 2° 18'$.

170. Угол a определяется по частям (фиг. 257): $a = x + y$; $\operatorname{tg} x = \frac{2}{5}p : \frac{3}{5}p = \frac{2}{3} = 0{,}6667$; $x = 33° 41'$; $\operatorname{tg} y = \frac{3}{5}p : \frac{3}{5}p = 1$; $y = 45°$; $a = 78° 41'$.

171. $\operatorname{tg} a = \frac{3}{20} = 0{,}15$. (Фиг. 258). Конусность $= 0{,}15$. Угол $a = 8° 32'$.

Для уменьшения трения подшипников очень часто конец вала вращающийся в подшипнике, окружают со всех сторон стальными закаленными конусными катками (роликами) или шариками. Таким образом, конец вала (так наз. шип) теперь уже не скользит во вкладыше, а катится по роликам или шарикам (см. задачу № 179). Ролики или шарики должны быть помещены в особом кольце (так наз. роликовое или шариковое кольцо).



Фиг. 256.

172. Tg $63°26' = 1,9999$; Cos $70°52' = 0,3278$.
Cosec $24°35' = 2,4037$; Cotg $36°1' = 1,3756$.

173. Arc cos $0,7 = 45°34'$. Arc sec $1,05 = 17°45'$.
Arc cosec $1,25 = 53°8'$. Arc ctg $0,875 = 48°49'$.

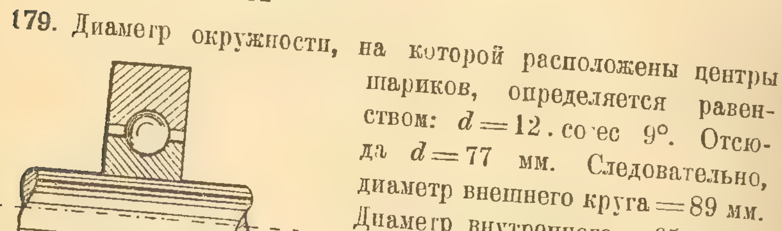
174. См. §§ 116 и 100.

175. Искомая длина $L = 14 \cdot \mathrm{cosec}\ 35°$.
$L = 24,4$ метра.

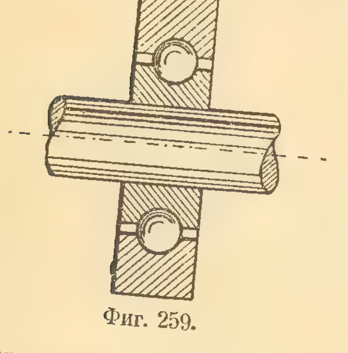
176. $\mathrm{Cos}\ \alpha = {}^{19}/_{25}$; $\alpha = 40°32'$.

177. Искомое расстояние $x = 250 \cdot \sin\dfrac{360°}{16} = 95,7$ мм.

178. $p = 100 \cdot \sin\dfrac{360°}{32} = 19,5$ мм.



179. Диаметр окружности, на которой расположены центры шариков, определяется равенством: $d = 12 \cdot \mathrm{cosec}\ 9°$. Отсюда $d = 77$ мм. Следовательно, диаметр внешнего круга $= 89$ мм. Диаметр внутреннего $= 65$ мм.



Фиг. 259.

На фигуре 259 изображено „шариковое кольцо“. Как видно из рисунка, шариковое кольцо состоит собственно из 2-х стальных колец: внутреннее плотно нагоняется на вал, а наружное закрепляется в особом подшипнике. См. задачу № 171.

180. По § 122 $D_1 = D - 2\frac{2}{3}h$; но по фиг. 203: $h = \frac{p}{2}\ \mathrm{cotg}\ \frac{55°}{2}$; следовательно:

$$D_1 = D - \frac{2 \times 2 \times p \times \mathrm{cotg}\ 27°30'}{3 \times 2} = D - 1,28\ p = D - \frac{1,28}{N}.$$

181. По формуле, выведенной в задаче № 180, имеем:

$$D_1 = 1,49'' = 1\tfrac{1}{2}''.$$

182. По § 128: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{p}{\pi d}$; $d = \frac{D + D_1}{2}$; по § 119: $D_1 = D - 2(0,5p + 0,01) = 0,98$; $d = \frac{2 + 0.98}{2} = 1,49$; $\mathrm{tg}\,\alpha = 0,2136$; $\alpha = 12°3'$.

183. $\text{Sin } 30° = \frac{1}{2} = 0{,}5000$

$\text{Cos } 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660.$

$\text{Tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5774.$

$\text{Cotg } 30° = \sqrt{3} = 1{,}7321.$

$\text{Sec } 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}1548.$

$\text{Cosec } 30° = 2.$

184. $(\text{Sin } 15°)^2 = \frac{1}{2}(1 - 0{,}866) = \frac{0{,}134}{2} = 0{,}067.$

$\text{Sin } 15° = \sqrt{0{,}067} = 0{,}2588.$

$(\text{Cos } 15°)^2 = \frac{1}{2}(1 + 0{,}866) = \frac{1{,}866}{2} = 0{,}933.$

$\text{Cos } 15° = \sqrt{0{,}933} = 0{,}9659$ и т.

185. Так как форма нарезки не указана, то угол вычисляем по наружному диаметру; $\text{tg } a = 0{,}0354$; $= 2° 2'$.

186. См. § 119. $c = 0{,}3707$ $p = 0{,}0052$ дм. $= 0{,}0566$ дюйма.

187. $\text{Sin } DAB = \frac{BC}{2 \cdot AB} = 0{,}04$; угол $DAB = 2° 18'$.

$$AD = AB \times \text{Sec } DAB = 150{,}12 \text{ мм.}$$

188. AC можно найти двумя путями:

1) $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 199{,}64$ мм.

2) $AC = AB \times \text{Cos } CAB$, по $\text{Sin } CAB = \frac{BC}{AB}$;

$\text{Sin } CAB = 0{,}06$; угол $CAB = 3° 26'$ $AC = 199{,}64$ мм.

189. По условию задачи шаг нарезки на сверле равен $7d$, где d — диаметр сверла. Отсюда угол подъема определяется равенством:

$$\text{tg } a = \frac{7d}{\pi d} = \frac{7}{3{,}1416} = 7 \times 0{,}3183 = 2{,}2281; \; a = 65° 50'.$$

Угол спирали b определяется равенством (см. § 130):

$$\text{tg} b = \frac{\pi d}{7d} = 0{,}4489; \; b = 24° 10'; \; a + b = 90°.$$

190. См. § 132. $\operatorname{Sin} 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30°$.
$\operatorname{Cos} 150° = -\cos 30°$; $\operatorname{tg} 150° = -\operatorname{tg} 30°$.
$\operatorname{Tg} 135° = \operatorname{tg}(180° - 45°) = -\operatorname{tg} 45°$.
$\operatorname{Ctg} 135° = -\operatorname{cotg} 45°$.
$\operatorname{Sin} 160° 35' = \sin(180° - 19° 25') = \sin 19° 25' = 0{,}3325$.
$\operatorname{Cos} 160° 35' = -\cos 19° 25' = -0{,}9431$.
$\operatorname{Sec} 160° 35' = -\sec 19° 25' = -1{,}0604$.

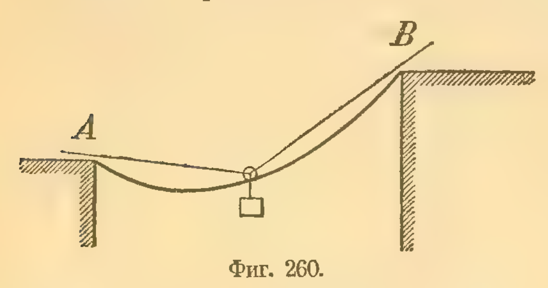
191. В треугольнике ABC по формуле косинуса угла находим угол $BAC = 29° 41'$. Из прямоугольного треугольника определяем $x = AC \cdot \cos BAC$ и $y = AC \cdot \sin BAC$; $x = 69{,}5$ мм.; $y = 39{,}6$ мм.

192. См. § 139 (1). $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$; $b = 48{,}6$ метра. S (§ 140) $= \frac{1}{2} ac \sin B = 900{,}7$ кв. метра.

193. См. § 139 (2) $\angle B = 61° 10'$;

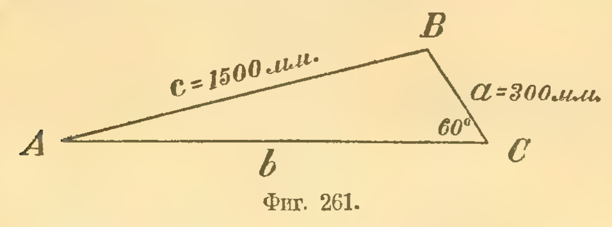
$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = 119{,}5 \text{ метров.}$$

Канатная дорога состоит из стального каната, перекинутого между двумя точками A и B, между которыми нужно устроить сообщение. По канату может катиться блок (или тележка с подвешенным грузом). Блок передвигают помощью веревок AC и BC (фиг. 260).



Фиг. 260.

194. По формуле косинуса определяем $\cos C$ по трем данным сторонам треугольника: $\cos C = -0{,}3521$;



Фиг. 261.

$$\arccos 0{,}3521 = 69° 23'; \text{ отсюда угол } C = 180° - 69° 23' = 110° 37'.$$

195. а) См. § 139 (4) (фиг. 261).

$$\operatorname{Sin} A = \frac{a \sin C}{C}.$$

$$A = 9^\circ 59'.$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = 162{,}7 \text{ см}.$$

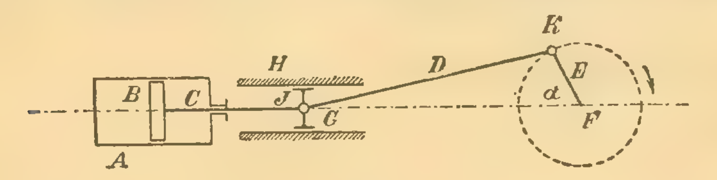
б) $x = (150 + 30) - 162{,}7 = 17{,}3$ см.

в) (1). $\angle ACB = 90^\circ$; $\sin A = \frac{a}{c} = 0{,}2$; $\angle A = 11^\circ 32'$.

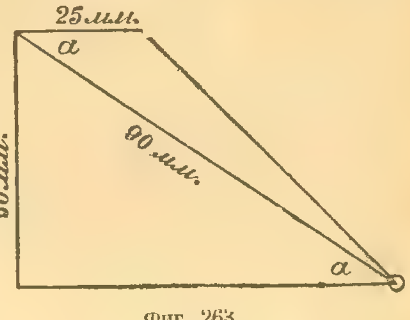
(2). $\angle ABC = 90^\circ$; $\operatorname{tg} C = 5$; $\angle C = 78^\circ 41'$.

$\operatorname{tg} A = 0{,}2$; $\angle A = 11^\circ 19'$.

На фигуре 230 изображен так наз. „механизм кривошипа и ползуна" в применении к паровой машине. На фиг. 262 обозначено: A — цилиндр паровой машины, B — поршень, C — поршневой шток, D — шатун, E — кривошип, F — вал, G — крейцкопф или ползун, H — направляющие, I — крейцкопфный болт, K — палец кривошипа. Длина кровошипа (считая от центра вала до центра пальца) делается обыкновенно в 5 раз меньше длины шатуна (считая от центра крейцкопфного болта до центра пальца кривошипа). Ход поршня, т.-е. длина пути, проходимого им в цилиндре (в один конец), равен, очевидно, двум длинам кривошипа. При одном обороте вала поршень делает два хода. Задачу рекомендуется проверить на чертеже, построенном в достаточно крупном масштабе.



Фиг. 262.



Фиг. 263.

196. $\sin \alpha = \frac{50}{90}$; $\alpha = 33^\circ 45'$ (фиг. 263).

$$\frac{D^2}{4} = 25^2 + 90^2 - 2 \times 25 \times 90 \times \cos 33^\circ 45'.$$

$D = 141{,}2$ мм.

197. Решается совершенно одинаково с задачею № 196.

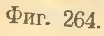
$\sin \alpha = \frac{10}{35}$; $\alpha = 16^\circ 36'$.

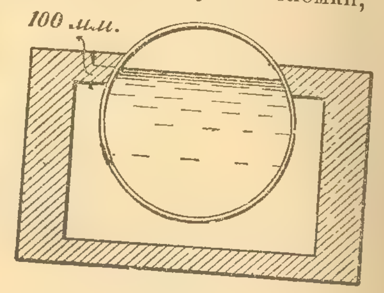
$$\frac{D^2}{4} = 35^2 + 10^2 + 2 \times 35 \times 10 \times \cos 16^\circ 36'.$$

$D = 51{,}2$ мм.

Круглый резец иногда применяется при работе на токарном станке вместо обыкновенного прямого резца (см. фиг. 264). Преимущество круглого резца состоит в том, что в случае поломки,




Фиг. 264.



Фиг. 265.

его достаточно заточить по плоскости AB (фиг. 232), чтобы получить опять точный профиль. С другой стороны, изготовление круглого фасонного резца проще, чем прямого, так как он изготовляется очень точно на токарном станке.

198. d) 5,4456; e) 4,6923; f) 2,0913; g) 9,4464.

199. a) 529,63; b) 2,6541; c) 1 896 500;
d) 10405; e) 5,45; f) 164 930;
g) 188 780 000.

200. 28 740 000.

201. 78 450 000.

202. 4,008.

203. 11,005.

204. $8{,}33 \times 2{,}87 \times 2320 = 554$ р. 63 к.

205. $6,95 \times 9,41 \times 256 = 167$ р. 42 к.

206. 48,422 *HP*.

207 $$S = \frac{225 \times 11,8}{23,5} = 112,97 \text{ кв. метра.}$$

Поверхностью нагрева котла называется та поверхность, которая с одной стороны омывается водой, а с другой — горячими газами топки (фиг. 265). Каждый квадратный метр поверхности нагрева котла может дать в один час определенное количество пара, в зависимости от системы котла и от интенсивности топки. Паровая машина требует в один час на одну лош. силу известное количество пара, которое зависит от величины и системы паровой машины.

208. a) $\bar{1},8669 = 9,8669 - 10$; b) $\bar{3},9186 = 7,9186 - 10$;
c) $7,5073 - 10$; d) 0,6250; e) $5,6325 - 10$;
f) $9,4344 - 10$; g) $\bar{9},9917 = 1,9917 - 10$.

209. a) 0,66314; b) 0,000 186 39; c) 0,001 207 5;
d) 0,000 002 03; e) 0,000 000 000 002 11; f) 1,8704.

210. 44,21

211. 366,42.

212. $lg\, 0,2796 = 9,4466 - 10$.

При делении логарифма с дополнением, каков данный $9,4466 - 10$, необходимо предварительно прибавить и вычесть по 10 столько раз, чтобы вычитаемое при делении на данного делителя дало в частном 10. В данном случае при делении на 2, вычитаемое должно быть равным 20, поэтому прибавляем и вычитаем по 10, получаем:

$$19,4466 - 20;$$

делим на 2:

$$(19,4466 - 20) : 2 = 9,7233 - 10.$$

поэтому $$lg \sqrt{0,2796} = 9,7233 - 10.$$

следовательно, $$\sqrt{0,2796} = 0,52878.$$

213. $x = \sqrt[3]{0{,}07284}$; $\lg x = \frac{1}{3}\lg 0{,}07284 = \frac{1}{3}(8{,}8623 - 10 + 20 - 20) = \frac{1}{3}(28{,}8623 - 30) = 9{,}6208 - 10.$

$$x = 0{,}41764.$$

214. $$D^3 = \frac{6 \times 1520}{3{,}1416} = \frac{9120}{3{,}1416}.$$

$$D = 14{,}267 = 14{,}3 \text{ см.}$$

215. $N = \frac{d^3 n}{130^3} = 26{,}9$ лош. сил.

216. $d = \frac{130 \times \sqrt[3]{28}}{\sqrt[3]{175}} = 70{,}6$ мм.

217. $p = \frac{2 \times 1{,}2 \times 0{,}75 \times 740}{170} = 7{,}84$ атм.

218. 1) $\alpha = 2\pi\frac{3}{2} = 3\pi$. Для μ берем значение 0,4

$$P = \frac{Q}{e^{\mu\alpha}} = \frac{1000}{2{,}718^{0{,}4 \times 3 \times 3{,}1416}} = \frac{1000}{2{,}718^{3{,}77}} = 23{,}05 \text{ кгр.}$$

2) $P = Q \cdot e^{\mu\alpha} = 1000 \times 2{,}718^{3{,}77} = 43380$ кгр. $= 43{,}4$ тонны.

219. $t = 4{,}73 \times \sqrt[3]{\frac{716200 \times 4{,}5}{2{,}25 \times 3{,}8 \times 72 \times 112}} = 17{,}04$ мм.

220. $p_2 = 6{,}67$ атмосферы.

Таблица 1.

Ср внительная таблица английских и метрических мер.

Английские.	Метрические.
Линейные меры	
Дюйм	2,540 сантиметра
Фут = 12 дюймам	0,3048 метра
Ярд = 3 футам	0,9144 метра
Миля = 1760 ярдов	1,6093 киломстра
Квадратные меры.	
Квадратный дюйм	6,4516 кв. сантиметра
Квадратный фут	0,0929 кв. метра
Акр = 4840 кв. ярда	0,4047 гектара
Меры объема.	
Кубический дюйм	16,3871 кб. сантиметра
Кубический фут	28,3168 литра
Меры веса.	
Английская тонна = 20 центн	1,016 метрич. тонны
Центнер = 112 торг. фунт	50,802 килограмма
Торговый фунт	0,4536 килограмма
Единицы давления.	
Фувт на кв. дюйм	0.0703 кгр. на кв. см.
Атмосфера = давлению столба ртути в 30 дюймов высотою = 14,735 фунта на кв. дюйм	1,0360 кгр. на кв. см.
14,696 фунта на кв. дюйм	Старая атмосфера („нормальное давление“) = давлению столба ртути в 76 см. высотою = 1,0336 кгр. на кв. см.
14,223 фунга на кв. дюйм	Метрическая (новая) атмосфера = давлению столба воды в 10 м. высотою = 1 кгр. на кв. см.
Единицы оаботы.	
Фунто-фут	0,1383 килограмм-метра
Еднницы мощности.	
Англ. паровая лошадь = 550 фунто-футов	76,04 кгр.-метра в сек.
542,5 фунго-футов	Метр. паровая лошадь = 75 кгр.-метров в сек.

Таблица 2.

Для перевода дюймов в миллиметры и футов в метры.

Дюймы.	Миллиметры.	Футы.	Метры.
1/64	0,397	1	0,305
1/32	0,794	2	0,610
1/16	1,587	3	0,914
3/32	2,381	4	1,219
1/8	3,175	5	1.524
5/32	3,969	6	1,829
3/16	4,762	7	2.134
7/32	5,556	8	2,438
1/4	6,350	9	2,743
9/32	7,144	10	3.048
5/16	7,937	15	4,572
11/32	8,731	20	6,096
3/8	9,525	25	7,620
13/32	10,318	30	9,144
7/16	11,112	35	10.668
15/32	11.906	40	12.192
1/2	12,700	45	13.716
9/16	14,287	50	15,240
5/8	15,875	55	16.764
11/16	17.462	60	18.288
3/4	19,050	65	19,812
13/16	20,637	70	21,336
7/8	22,224	75	22,860
15/16	23,812	80	24.384
1	25,40	85	25,908
2	50,80	90	27,431
3	76.20	100	30,479
4	101,60	200	60,995
5	127.00	300	91,438
6	152,40	400	121,92
7	177,80	500	152,40
8	203,20	600	182,88
9	228,60	700	213,36
10	254,00	800	243,84
11	279,39	900	274,31
12	304,79	1000	304.79

Таблица 3.

Отношение длины окружности к диаметру обозначают греческою буквою π *(пи)*.

$\pi = 3{,}1416$

$lg\,\pi = 0{,}4971$

$\pi^2 = 9{,}8696$

$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$

$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4646$

$2\pi = 6{,}2832$

$3\pi = 9{,}4248$

$4\pi = 12{,}5664$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$

$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}5642$

$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0{,}6828$

$\frac{1}{2\pi} = 0{,}1592$

$\frac{2}{\pi} = 0{,}6366$

$\frac{4}{\pi} = 1{,}2732$

$\frac{6}{\pi} = 1{,}9099$

$\frac{360}{2\pi} = 57{,}2958$

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 1{,}2407$

$\frac{4}{3}\pi = 4{,}1888$

$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$

$\frac{\pi}{3} = 1{,}0472$

$\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$

$\frac{\pi}{6} = 0{,}5236$

$\frac{\pi}{12} = 0{,}2618$

$\frac{\pi}{360} = 0{,}0087$

$\frac{2\pi}{360} = 0{,}0175$

$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0{,}8060$

Архимед, знаменитый греческий ученый, математик и физик (287 — 212 г. до Р. Х.) нашел, что

$$\pi = \frac{22}{7};$$

это значение удобно применять при грубых вычислениях.

Центральный угол, у которого длина дуги равна радиусу, содержит:

$57°{,}2958$

или

$57°\ 17'{,}75.$

Таблица 4.

Число или диаметр.	Квадрат.	Куб.	Квадратный корень.	Кубичный корень.	Обратная величина.	Окружность круга.	Площадь круга.
1	1	1	1,0000	1,0000	1,0000	3,1416	0.7854
2	4	8	1,4142	1,2599	0,5000	6,2832	3,1416
3	9	27	1,7321	1,4422	0,3333	9,4248	7,0686
4	16	64	2,0000	1,5874	0,2500	12,566	12,566
5	25	125	2,2361	1,7100	0,2000	15,708	19,635
6	36	216	2,4495	1,8171	0,1667	18,850	28,274
7	49	343	2,6458	1,9129	0,1429	21,991	38,485
8	64	512	2,8284	2,0000	0,1250	25,133	50,265
9	81	729	3,0000	2,0801	0,1111	28,274	63,617
10	100	1000	3,1623	2,1544	0.1000	31.416	78,540
11	121	1331	3,3166	2,2240	0,0909	34,558	95,033
12	144	1728	3,4641	2,2894	0.0833	37.699	113,10
13	169	2197	3.6056	2,3513	0,0769	40,841	132,73
14	196	2744	3,7417	2,4101	0,0714	43,982	153,94
15	225	3375	3,8730	2,4662	0.0667	47,124	176,71
16	256	4096	4,0000	2,5198	0,0625	50,265	201,06
17	289	4913	4,1231	2,5713	0,0588	53,407	226,98
18	324	5832	4,2426	2,6207	0,0556	56,549	254,47
19	361	6859	4,3589	2,6684	0,0526	59,690	283,53
20	400	8000	4,4721	2,7144	0,0500	62,832	314,16
21	441	9261	4,5826	2,7589	0,0476	65,973	346,36
22	484	10648	4,6904	2,8020	0.0455	69,115	380,13
23	529	12167	4,7958	2,8439	0.0435	72,257	415,48
24	576	13824	4,8990	2,8845	0.0417	75,398	452,39
25	625	15625	5,0000	2,9240	0,0400	78,540	490,87

Таблица 4.

Число или диаметр.	Квадрат	Куб.	Квадратный корень.	Кубичный корень.	Обратная величина.	Окружность круга	Площадь круга.
26	676	17576	5,0990	2,9625	0,0385	81,681	530,93
27	729	19683	5,1962	3,0000	0,0370	84,823	572,56
28	784	21952	5,2915	3,0366	0,0357	87,965	615,75
29	841	24389	5,3852	3,0723	0,0345	91,106	660,52
30	900	27000	5.4772	3,1072	0,0333	94.248	706,86
31	961	29791	5,5678	3,1414	0,0323	97,389	754,77
32	1024	32768	5,6569	3,1748	0,0313	100,53	804,25
33	1089	35937	5,7446	3,2075	0,0303	103,67	855,30
34	1156	39304	5,8310	3,2396	0,0294	106,81	907,92
35	1225	42875	5,9161	3,2711	0,0286	109,96	962,11
36	1296	46656	6,0000	3,3019	0,0278	113,10	1017,9
37	1369	50653	6,0828	3,3322	0,0270	116,24	1075,2
38	1444	54872	6.1644	3,3620	0,0263	119,38	1134.1
39	1521	59319	6,2450	3.3912	0,0256	122,52	1194,6
40	1600	64000	6,3246	3,4200	0,0250	125.66	1256,6
41	1681	68921	6,4031	3,4482	0,0244	128,81	1320,3
42	1764	74088	6,4807	3,4760	0,0238	131.95	1385,4
43	1849	79507	6,5574	3,5034	0,0233	135,09	1452,2
44	1936	85184	6,6332	3,5303	0,0227	138,23	1520,5
45	2025	91125	6,7082	3.5569	0,0222	141,37	1590,4
46	2116	97336	6,7823	3.5830	0.0217	144,51	1661,9
47	2209	103823	6,8557	3.6088	0,0213	147,65	1734,9
48	2304	110592	6.9282	3.6342	0,0208	150,80	1809,6
49	2401	117649	7,0000	3,6593	0.0204	153,94	1885.7
50	2500	125000	7,0711	3,6840	0,0200	157,08	1963,5

Таблица 4.

Число или диаметр.	Квадрат.	Куб.	Квадратный корень.	Кубичный корень.	Обратная величина.	Окружность круга.	Площадь круга.
51	2601	132651	7,1414	3,7084	0,0196	160,22	2042,8
52	2704	140608	7,2111	3,7325	0,0192	163,36	2123,7
53	2809	148877	7,2801	3,7563	0.0189	166,50	2206,2
54	2916	157464	7.3485	3,7798	0,0185	169,65	2290,2
55	3025	166375	7,4162	3,8030	0,0182	172,79	2375,8
56	3136	175616	7,4833	3,8259	0,0179	175,93	2463,0
57	3249	185193	7.5498	3,8485	0,0175	179,07	2551,8
58	3364	195112	7,6158	3,8709	0,0172	182,21	2642,1
59	3481	205379	7,6811	3,8930	0,0169	185,35	2734,0
60	3600	216000	7,7460	3,9149	0,0167	188,50	2827,4
61	3721	226981	7,8102	3,9365	0,0164	191,64	2922,5
62	3844	238328	7,8740	3,9579	0,0161	194,78	3019,1
63	3969	250047	7,9373	3,9791	0,0159	197,92	3117,2
64	4096	262144	8,0000	4,0000	0,0156	201,06	3217,0
65	4225	274625	8.0623	4,0207	0,0154	204,20	3318,3
66	4356	287496	8,1240	4,0412	0,0152	207,35	3421,2
67	4489	300763	8,1854	4,0615	0,0149	210,49	3525,7
68	4624	314432	8,2462	4,0817	0,0147	213.63	3631,7
69	4761	328509	8,3066	4,1016	0,0145	216.77	3739,3
70	4900	343000	8,3666	4,1213	0,0143	219,91	3848,5
71	5041	357911	8,4261	4,1408	0,0141	223,05	3959,2
72	5184	373248	8.4853	4,1602	0,0139	226,19	4071,5
73	5329	389017	8,5440	4,1793	0,0137	229,34	4185,4
74	5476	405224	8,6023	4,1983	0,0135	232,48	4300,8
75	5625	421875	8,6603	4,2172	0,0133	235,62	4417,9

Таблица 4.

Число или диаметр.	Квадрат.	Куб.	Квадратный корень.	Кубичный корень.	Обратная величина.	Окружность круга.	Площадь круга.
76	5776	438976	8,7178	4,2358	0,0132	238,76	4536,5
77	5929	456533	8,7750	4,2543	0,0130	241,90	4656,6
78	6084	474552	8,8318	4,2727	0,0128	245,04	4778,4
79	6241	493039	8,8882	4,2908	0,0127	248,19	4901,7
80	6400	512000	8,9443	4,3089	0,0125	251,33	5026,5
81	6561	531441	9,0000	4,3267	0,0123	254,47	5153,0
82	6724	551368	9,0554	4,3445	0,0122	257,61	5281,0
83	6889	571787	9,1104	4,3621	0,0120	260,75	5410,6
84	7056	592704	9,1652	4,3795	0,0119	263,89	5541,8
85	7225	614125	9,2195	4,3968	0,0118	267,04	5674,5
86	7396	636056	9,2736	4,4140	0,0116	270,18	5808,8
87	7569	658503	9,3274	4,4310	0,0115	273,32	5944,7
88	7744	681472	9,3808	4,4480	0,0114	276,46	6082,1
89	7921	704969	9,4340	4,4647	0,0112	279,60	6221,1
90	8100	729000	9,4868	4,4814	0,0111	282,74	6361,7
91	8281	753571	9,5394	4,4979	0,0110	285,88	6503,9
92	8464	778688	9,5917	4,5144	0,0109	289,03	6647,6
93	8649	804357	9,6437	4,5307	0,0108	292,17	6792,9
94	8836	830584	9,6954	4,5468	0,0106	295,31	6939,8
95	9025	857375	9,7468	4,5629	0,0105	298,45	7088,2
96	9216	884736	9,7980	4,5789	0,0104	301,59	7238,2
97	9409	912673	9,8489	4,5947	0,0103	304,73	7389,8
98	9604	941192	9,8995	4,6104	0,0102	307,88	7543,0
99	9801	970299	9,9499	4,6261	0,0101	311,02	7697,7
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	0,0100	314,16	7854,0

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Главы. *Стр*

I. Формулы . . . . 3—14

1. Значение формул. 2. Применение букв. 3. Исключение знака умножения. 4. Подстановка. 5. Порядок действий. 6. Скобки. 7. Составление формул. Задачи (1 — 12).

II. Алгебраическая сумма . . . . 15—22

8. Алгебраические выражения и их члены. 9. Подобные или однородные члены. 10. Положительные и отрицательные величины. 11. Алгебраические суммы. 12. Сложение. 13. Сложение многочленов. Задачи (13 — 26).

III. Алгебраическая разность . . . . 23—29

14. Разность подобных членов. 15. Вычитание отрицательных величин. 16. Разность многочленов. 17. Применение различных скобок. Задачи (27 — 37).

IV. Преобразование формул . . . . 30—41

18. Уравнения. 19. Преобразования уравнений. 20. Перестановка членов уравнений. 21. Правила для преобразования уравнений. 22. Сокращения. 23. Перемена всех знаков уравнения. Задачи (38 — 51).

V. Алгебраическое умножение и деление . . . . 42—50

24. Умножение. 25. Деление. 26. Правила знаков. 27. Умножение многочленов. 28. Деление многочленов. 29. Разложение на множители. Задачи (52 — 70).

VI. Решение простых уравнений . . . . 51—54

30. Составление уравнений. 31. Решение уравнений. Задачи (71 — 80).

VII. Совместные уравнения и квадратные уравнения . . . . 55—75

32. Совместные уравнения. 33. Решение совместных уравнений способом подстановки. 34. Способ исключения. 35. Совместные уравнения с тремя неизвестными. 36. Квадратные уравнения. Задачи (81 — 90).

Главы. Стр.

VIII. **Таблицы и графики** . . . . 74—83

37. Пользование таблицами. 38. Пользование графиками. Задачи (91—98).

IX. **Уравнения кривых линий** . . . . 84—100

39. Кривые линии и их уравнении. 40. Положительные и отрицательные координаты. 41. Уравнение прямой линии. 42. Нахождение уравнения прямой. 43. Уравнения кривых. Задачи (99—104).

X. **Геометрические построения** . . . . 101—120

44. Определения. 45. Углы. 46. Круг и окружность. 47. Измерение углов. 48. Провести на известном расстоянии прямую, параллельную данной прямой. 49. Деление данного отрезка прямой пополам. 50. Разделить данный отрезок прямой на несколько равных частей. 51. Деление угла пополам. 52. Проведение перпендикуляра к данной прямой из точки на этой прямой. 53. Опускание перпендикуляра из точки. 54. Построение некоторых простых углов. 55. Построение равных углов. 56. Найти центр дуги окружности. 57. Провести окружность через три данные точки. 58. Определить радиус данной дуги. 59. Углы с вершиною на окружности. 60. Углы с вершиною внутри или вне круга. Задачи (105—115).

XI **Построение геометрических фигур** . . . . 121—136

61. Многоугольники. 62. Треугольники. 63. Квадрат. 64. Прямоугольник. 65. Параллелограм. 66. Трапеция. 67. Пятиугольник. 68. Правильный шестиугольник. 69. Правильный восьмиугольник. 70. Таблица для деления круга. 71. Эллипс и овал. Задачи (116—126).

XII. **Площади геометрических фигур** . . . . 137—153

72. Площади квадратов и прямоугольников. 73. Площади треугольников. 74. Площадь параллелограма. 75. Площади трапеций. 76. Площадь неправильного четырехугольника. 77. Площадь правильного шестиугольника. 78. Площади различных правильных многоугольников. 79. Площадь неправильного многоугольника. 80. Площади подобных фигур. 81. Площадь круга. 82. Площадь эллипса. 83. Площадь кругового сектора. 84. Площадь кругового сегмента. 85. Площади неправильных фигур. 86. Планиметр. Задачи. (127—140).

XIII. **Объемы и поверхности тел** . . . . 154—167

87. Призма. 88. Цилиндр. 89. Движение жидкостей и газов в трубах. 90. Пирамида. 91. Конус. 92. Усеченная пирамида и усеченный конус. 93. Призматоид. 94. Шар. 95. Сферический отрезок и сферический сегмент. 96. Шаровое кольцо. 97. Объемы тел неправильной формы. Задачи (141—151).

Главы. Стр.

XIV. Тригонометрические функции. Тангенс и котангенс . . 168—192

98. Тригонометрия и ее применение. 99. Тангенс. 100. Построение угла по его тангенсу. 101. Измерение углов посредством их тангенсов. 102. Примеры на применение тангенсов. 103. Тангенсы некоторых часто встречаемых углов. 104. Котангенс. 105. Пользование таблицей тригонометрических величин. 106. Конические шестерни. Задачи (152—161). Таблицы натуральных тригонометрических функций.

XV. Практические вычисления с применением тангенсов и котангенсов . . . . 193—203

107. Вычисление высот и расстояний. 108. Размеры винтовых нарезок в форме *V*. 109. Размеры нормальных американских нарезок. 110. Конусность и получение конусных поверхностей. 111. Круговые функции. Задачи (162—171).

XVI. Синус, косинус, секанс и косеканс . . . . 204—216

112. Синус. 113. Косинус. 114. Секанс. 115. Косеканс. 116. Построение углов по их тригонометрическим величинам. 117. Пользование таблицами. 118. Нахождение промежуточных значений или интерполирование. Задачи (172—179).

XVII. Винтовые нарезки и шестерни со спиральной нарезкой. 217—225

119. Нарезка Акме. 120. Червячная нарезка Браун и Шарп в 92°. 121. Нарезка Брига для труб. 122. Винтовая нарезка Витворта. 123. Нарезка Британской Ассоциации. 124. Метрическая нарезка. 125. Международная нарезка. 126. Нарезка вроде зубьев пилы. 127. Квадратная нарезка. 128. Шаг и угол подъема винтовой линии. 129. Нарезка в несколько ниток. 130. Шестерни со спиральной нарезкой. 131. Соотношение между тригонометрическими функциями. Задачи(180—189).

XVIII. Решение треугольников . . . . 226—238

132. Тригонометрические функции углов бо́льших 90°. 133. Тригонометрические величины угла 0°. 134. Тригонометрические величины угла в 90°. 135. Тригонометрические величины угла в 180°. 136. Решение треугольников. 137. Зависимость между косинусом угла и сторонами треугольника. 138. Зависимость между синусами углов и сторонами треугольника. 139. Применение правил §§ 137 и 138 к решению треугольников. 140. Площади треугольников. Задачи (190—197)

XIX. Логарифмы . . . . 239—254

141. Основные определения. 142. Дробные показатели. 143. Обыкновенные логарифмы. 144. Объяснение логарифми-

Стр.

Главы.

ческих таблиц. 145. Интерполяция. 146. Антилогарифмы. 147. Умножение посредством логарифмов. 148. Деление посредством логарифмов. Задачи (198 — 207). Таблицы логарифмов.

XX. Логарифмы десятичных дробей, степеней и корней . . 255—262

149. Логарифмы десятичных дробей. 150. Степени и корни. 151. Дробные показатели. 152. Логарифмы тригонометрических функций. Задачи (208 — 220).

XXI. Ответы и решения задач. Объяснение технических терминов . . . . 263—292

XXII. Вспомогательные таблицы. . . . . 293 – 299

